THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Paul ROUGÉE

Première thèse

ÉQUILIBRE DES COQUES ÉLASTIQUES MINCES INHOMOGÈNES EN THÉORIE NON LINÉAIRE

Deuxième thèse

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 9 mai 1969 devant la Commission d'Examen

M. LIONS, *Président*
M. BROUSSE, Mme VAILLANT, *Examinateurs*
M. GERMAIN, M. ROSEAU

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552212_0001

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Paul ROUGÉE

Première thèse

ÉQUILIBRE DES COQUES ÉLASTIQUES MINCES INHOMOGÈNES EN THÉORIE NON LINÉAIRE

Deuxième thèse

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 9 mai 1969 devant la Commission d'Examen

M. LIONS, *Président*
M. BROUSSE, Mme VAILLANT, *Examinateurs*
M. GERMAIN, M. ROSEAU

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

INTRODUCTION

L'objet de ce travail est d'étudier en théorie non linéaire les positions d'équilibre d'un système matériel comportant essentiellement un élément de coque mince élastique.

Le chapitre I est consacré à l'introduction des espaces fonctionnels utilisés.

Il s'agit de produits d'espaces de Sobolev de distributions sur un ouvert connexe borné d'une surface cylindrique plongée dans R^3. Certaines propriétés de ces espaces sont rappelées. Des normes équivalentes aux normes de définition sont mises en évidence, dans l'optique des travaux de LIONS [9] et CAMPANATO [7].

Au chapitre II est introduite la théorie des coques utilisée, les types de montage étudiés sont précisés, et les problèmes de l'équilibre posés.

La théorie utilisée est celle développée par KOITER [15] et [12], réduite ici au cas de coques de faible courbure, et étendue au cas de coques non homogènes.

Les relations déplacement-déformation sont approchées, mais néanmoins non linéaires par rapport à la composante normale du déplacement. Les relations contraintes-déformations sont linéaires (loi de HOOKE).

Les montages étudiés sont ceux comportant un élément de coque dont la surface moyenne est l'image dans une application C^1 et C^3 par

morceaux d'un domaine d'un cylindre de R^3 , ce qui comporte en plus des cas généralement étudiés celui des coques en forme de manchon, sous des conditions de fixation variées (support simple au bord, encastrement rigide, encastrement élastique, support élastique, ...) éventuellement mêlées, et sous des conditions de charge diverses.

Les problèmes d'équilibre sont posés sous forme variationnelle, c'est à dire sous la forme première fournie par le principe des travaux virtuels.

Au début de ce chapitre sont également mises en évidence de nouvelles normes équivalentes aux normes de définition dans les espaces utilisés, liées à la géométrie de la coque.

Le chapitre III est consacré à l'étude des équations linéarisées. Des conditions suffisantes sont données pour pouvoir conclure, par le théorème de Lax-Milgram, à l'existence et l'unicité de la position d'équilibre en théorie linéaire. Ces conditions portent sur la géométrie de la coque et les conditions de fixation. Dans toute la suite on suppose ces conditions réalisées.

Le chapitre IV est consacré à l'étude des équations non linéaires. Au début de ce chapitre, on dégage un critère d'existence d'une position d'équilibre réalisant le minimum absolu de la fonctionnelle de l'énergie du système, et un critère d'existence d'une position d'équilibre réalisant un minimum local. On utilise pour cela un théorème dû à BROWDER [18] . Ces critères sont employés dans la suite du chapitre.

Dans le sous chapitre A on établit des conditions suffisantes pour qu'il existe une position d'équilibre réalisant le minimum absolu

de l'énergie, et des conditions suffisantes pour que l'énergie ne soit pas bornée inférieurement.

Multipliant une charge donnée de la coque par un scalaire $\gamma \in R$, on est ainsi amené à partager R en zônes dans lesquelles l'une ou l'autre de ces éventualités se produit. Les résultats obtenus ne couvrent toutefois pas tout R quel que soit le type de charge, sauf dans le cas de coques planes.

Dans le paragraphe A-4, on met en évidence des conditions suffisantes, directement utilisables au vu des conditions de fixation, des géodésiques de la surface moyenne de la coque et des champs de force de charge, sous lesquelles existe un minimum absolu de l'énergie.

Les résultats du sous chapitre A sont appliqués dans le sous chapitre B, au cas d'une coque cylindrique en traction-compression suivant son axe.

Enfin, au sous chapitre C, on étudie l'existence d'une solution voisine de la solution du problème linéarisé. Plus précisément, multipliant une charge donnée par un scalaire $\gamma > 0$, on montre l'existence et l'unicité d'une solution voisine de la solution linéaire pour γ suffisamment petit. On montre en outre que cette solution réalise le minimum absolu de l'énergie, et on donne une condition suffisante pour qu'elle soit la seule position d'équilibre, stable ou non, du problème non linéaire. Le cas où la solution linéaire est de membrane, métallique ou non, est étudié plus particulièrement.

Enfin, on établit quelques propriétés des solutions de type non métallique, dont on montre en particulier l'unicité.

Cette thèse a été préparée sous la direction de M. BROUSSE.

Au cours de mes recherches, il m'a constamment apporté son aide et sa confiance. Je suis heureux de lui témoigner ici toute ma gratitude.

Ce travail doit beaucoup également à l'enseignement et aux ouvrages de M. LIONS . Je lui en suis très reconnaissant.

Je remercie Mme VAILLANT d'avoir bien voulu accueillir favorablement mon travail et de m'avoir donné d'utiles conseils.

M. TEMAM m'a amicalement encouragé. Il m'a fait connaître des publications qui m'ont été précieuses. Je l'en remercie vivement.

TABLE DES MATIERES

CH. I - ESPACES FONCTIONNELS

1 - Définitions I-1
2 - Cartes locales sur S et Ω I-3
3 - Choix de Ω I-5
4 - Rappel de quelques résultats I-6
5 - Normes équivalentes dans $H^m(\Omega)$ I-7
6 - Espace $\mathcal{V}$ I-10

CH.II - EQUATIONS DES COQUES

1 - Coordonnées, repères locaux II-2
2 - Déplacements - Déformations - Energie II-7
3 - Dérivées de Fréchet II-11
4 - Equations de l'équilibre II-13
5 - Commentaires et exemples II-14
6 - Exemple : machine à tester de type poids mort II-17
7 - Interprétation du problème 1 II-19

CH.III - EQUATIONS LINEAIRES

CH. IV - EQUATIONS NON LINEAIRES

Quelques résultats préliminaires IV-1

Sous chapitre A : MINIMUM ABSOLU DE L'ENERGIE

1 - Une condition suffisante d'existence de minimum absolu pour $E(u)$ IV-5
2 - Une autre condition suffisante d'Existence IV-1[illegible]
3 - Une condition suffisante de non existence IV-16
4 - Etude des éléments de Φ - Critères simples d'existence d'un minimum absolu de E IV-21

Sous chapitre B : APPLICATION A QUELQUES EXEMPLES DE COQUES CYLINDRIQUES

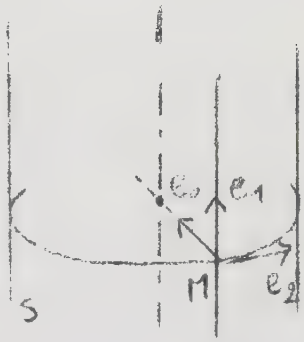
1 - Application des résultats de A-4 IV-34
2 - Exemple un IV-38
3 - Exemple deux IV-52
4 - Cas de la machine à tester de type déplacement imposé IV-58

Sous chapitre C : SOLUTIONS VOISINES DE LA SOLUTION DU PROBLEME LINEAIRE

1 - Cas général IV-60
2 - Un Lemme IV-68
3 - Un résultat sur les solutions de type nnn métallique IV-74
4 - Cas où la solution linéaire est de membrane IV-76

1 - Définitions

Soit S un cylindre droit à base circulaire de rayon un de l'espace euclidien orienté R^3, muni de la topologie induite par R^3, et orienté par le repère local orthonormé positif $(M, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_0})$ défini comme indiqué sur la figure.



S est localement isométrique à R^2 orienté. Ces isométries sont des cartes locales de S privilégiées que nous utiliserons, en leur imposant pour fixer les idées de transformer les génératrices (orientées) de S en les droites (orientées) x^2 = cste de R^2 rapporté aux coordonnées (x^1, x^2) orthonormées.

Soit Ω un ouvert borné connexe de S, et Γ sa frontière. Soit U (M) une fonction différentiable définie sur Ω. On désigne par $\frac{\partial U}{\partial x^i}$ la dérivée de U, le long des génératrices pour i = 1, le long des parallèles pour i = 2.

$\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables sur S et à support compact inclus dans Ω, muni de la topologie classique de Schwartz.

$\mathcal{D}'(\Omega)$ désigne le dual fort du précédent, espace de distributions réelles sur Ω (Cf :[1] pour les distributions sur le tore, [2], [3], [4] pour les distributions sur une variété).

T étant une distribution sur Ω , sa dérivée partielle $\frac{\partial T}{\partial x^i}$ est

par définition l'élément de $\mathcal{D}'(\Omega)$ défini par :

$$\frac{\partial T}{\partial x^i}\left[\varphi\right] = - T\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\right] \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

On assimile toute fonction $f(M)$ localement sommable sur Ω pour la mesure aire σ à la distribution définie par :

$$\varphi \to \int_\Omega f(M)\, \varphi(M)\, d\sigma \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

S étant localement euclidien, les dérivées partielles au sens des distributions et au sens des fonctions coïncident lorsque ces dernières existent.

On désigne par :

$L^p(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions à valeurs réelles de puissance $p^{\text{ième}}$ sommable sur Ω $(1 \leq p < \infty)$, muni de la norme classique. En particulier, $L^2(\Omega)$ est muni du produit scalaire classique noté $(u, v)_0$, la norme associée étant notée $\| u \|_0$

$B\,L(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω dont toutes les dérivées premières sont dans $L^2(\Omega)$, muni de la semi norme

$$\| u \|_1 = \left[\sum_i \left\| \frac{\partial u}{\partial x^i} \right\|_0^2\right]^{1/2}$$

$H^m(\Omega)$ l'espace (de Sobolev) des distributions appartenant, ainsi que leurs dérivées d'ordre inférieur ou égal à m, à $L^2(\Omega)$, muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\ell|=0}^{m} (D^\ell u, D^\ell v)_0 \quad , \text{ avec}$$

$$\ell = (\ell_1, \ell_2) \; ; \; \ell_i \geq 0 \; ; \; |\ell| = \ell_1 + \ell_2 \; ; \; D^\ell u = \frac{\partial^{|\ell|} u}{\partial x^{1\,\ell_1} \partial x^{2\,\ell_2}}$$

$H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

$H_o^m(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$

$H^{-m}(\Omega)$ le dual du précédent (espace de distributions)

Si u et v $\in \mathcal{D}'(\Omega)$ ont toutes leurs dérivées d'ordre k dans $L^2(\Omega)$ (espace $BL^k(\Omega)$), on pose

$$(u, v)_k = \sum_{|\ell|=k} (D^\ell u, D^\ell v)_o \quad \text{et} \quad \| u \|_k = (u, u)_k^{1/2}$$

2 - Cartes locales sur S et Ω

Le nombre minimum de cartes locales formant une famille complète sur S est de deux. On peut par exemple recouvrir S avec deux bandes limitées par des génératrices, des hélices, etc...

Soit (O_i, θ_i), i = 1...p, une famille finie de cartes locales isométriques de S telle que $O = \bigcup_i O_i \supset \bar{\Omega}$. Soient :

$$\Omega_i = O_i \cap \Omega \quad ; \quad \Gamma_i = O_i \cap \Gamma \quad ; \quad \hat{\Omega}_i = \theta_i(\Omega_i)$$

La famille (Ω_i, θ_i), i = 1...p, est une famille complète de cartes locales isométriques de Ω.

Soit u une distribution sur Ω. Les applications $\hat{P}_i(u)$ définies par

$$(1.1) \qquad \phi_i \in \mathcal{D}(\hat{\Omega}_i) \rightarrow \hat{P}_i(u)[\phi_i] = u[\phi_i \circ \theta_i]$$

sont des distributions sur l'ouvert $\hat{\Omega}_i$ de R^2 vérifiant :

$$(1.2) \quad \hat{P}_j[\phi_j] = \hat{P}_i[\varphi_j \circ \theta_j \theta_i^{-1}] \ \forall \phi_j \in \mathcal{D}(\theta_j(\Omega_i \cap \Omega_j)) \subset \mathcal{D}(\hat{\Omega}_j)$$

On désigne par $\hat{P}$ l'application $u \rightarrow \left\{ \hat{P}_i(u) \right\}$ de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans le sous espace fermé de $\prod_{i=1}^{p} \mathcal{D}'(\hat{\Omega}_i)$ constitué de l'ensemble E des éléments de cet espace vérifiant (1.2).

Inversement, soit $\hat{v}$ un élément de ce sous espace : $\hat{v} = \left\{ \hat{v}_i \right\}$

L'application $R(\hat{v})$ définie par :

$$(1.3) \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow R(\hat{v})[\varphi] = \sum_{i=1}^{p} \hat{v}_i \left[(f_i \varphi) \circ \theta_i^{-1} \right] \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

où f_i , $i = 1 \ldots p$, est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement O_i, est une distribution sur Ω indépendante de la partition f_i.

Les opérateurs R et $\hat{P}$ commutent avec les dérivations partielles.

Dans le cas des fonctions, on a $\hat{P}_i(u) = u_o \, \vartheta_i^{-1}$

et $R(\hat{v}) = \sum_{i=1}^{p} (\hat{v}_i \circ \vartheta_i) f_i$

R et $\hat{P}$ sont deux isomorphismes topologiques réciproques entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ et E, dont les restrictions aux espaces $L^q(\Omega)$ et $E \cap (\prod_{i=1}^{p} L^q(\hat{\Omega}_i))$ sont également des isomorphismes topologiques. Résultat analogue pour les restrictions aux espaces H^m, H_o^m, H^{-m}, B L [1].

R et $\hat{P}$ permettent donc très simplement d'étendre aux distributions sur Ω certaines propriétés des distributions sur les ouverts $\hat{\Omega}_i$ de R^2.

En particulier, la réduction de P à $\mathcal{D}'(\Omega_i) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ se réduit à la correspondance canonique entre $\mathcal{D}'(\Omega_i)$ et $\mathcal{D}'(\hat{\Omega}_i)$. Nous ne ferons plus de distinctions entre ces espaces, confondant ainsi Ω_i et $\hat{\Omega}_i$

(1.2) s'écrira alors : (1.2)' $u_i[\varphi] = u_j[\varphi] \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_i \cap \Omega_j)$

et exprime la propriété de "recollement des morceaux" [2].

---

(1) Il en va encore ainsi pour des distributions sur des variétés plus générales. La particularité ici, due à la structure localement euclidienne de S, est que ces applications commutent avec les dérivations partielles. Cela nous permet d'utiliser les dérivées partielles, donc les seules distributions, plutôt que les êtres plus complexes que sont les courants et leurs bord et cobord.

Tout ouvert Ω de S susceptible d'être représenté par une seule carte locale de domaine $\Omega_1 = \Omega$ est dit simple.

Un ouvert Ω non simple est dit manchon. Toute famille complète de cartes locales sur un ouvert manchon comporte au moins deux cartes.

3 - Choix de Ω

On suppose Ω connexe et borné, de frontière une courbe Γ constituée par un nombre fini d'arcs bornés de classe C^2, les tangentes aux points de raccordement faisant un angle non nul, et Ω étant localement d'un seul côté de Γ. On suppose en outre que Ω est la réunion d'un nombre fini d'ouverts Ω_i du type précédent et, de plus, simples et étoilés par rapport à tout point d'un cercle intérieur de rayon non nul.
Il en résulte (Cf : [1] partie II, [5] vol. V chap. IV (2), [6], [7], [8]) que les Ω_i sont des ouverts de Nikodym et de Friedrichs (3), et que les théorèmes énoncés dans le paragraphe ci-dessous, étendus à Ω grâce à R et $\hat{P}$ éventuellement, sont vérifiés.

---

(2) SMIRNOV n'utilise pas les distributions. Toutefois, les dérivées généralisées qu'il définit page 321 sont aussi des dérivées au sens des distributions . Et, bien qu'il ne définisse ces dérivées que lorsque fonction et dérivée sont toutes deux localement sommables sur Ω, les espaces de Sobolev qu'il introduit sont identiques à ceux définis ici, puisque, quel que soit $p \geq 1$, $L^p(\Omega)$ est inclus dans l'espace des fonctions localement sommables sur Ω .

(3) Ω est dit de Nikodym si tout $u \in B\,L(\Omega)$ est dans $H^1(\Omega)$. Pour la définition d'un ouvert de Friedrichs, voir [9] . On trouve en [7] et [8] des conditions suffisantes pour qu'un ouvert soit de Friedrichs.

4 - Quelques résultats

Théorème 1.1 : Ω est un ouvert de Nikodym, c. a. d., toute distribution de B L (Ω) est dans $H^1(\Omega)$.

Cela découle immédiatement du fait que chacun des Ω_i est de Nikodym et que l'appartenance à $H^1(\Omega)$ est une propriété locale.

Les théorèmes de traces se démontrent pour les ouverts sur un cylindre à l'aide de cartes locales de la même façon que pour des ouverts de R .

Nous utiliserons en particulier le

Théorème 1.2 : Soit $\mathcal{C}$ une courbe bornée, intersection d'une courbe de classe C^1 de $\overline{\Omega}$ et d'un ouvert de S. Il existe une application linéaire et une seule : $u \in H^1(\Omega) \to u_{|\mathcal{C}} \in L^2(\mathcal{C})$, dont la restriction aux fonctions φ continues sur $\overline{\Omega}$ soit l'application $\varphi \to$ trace de φ sur $\mathcal{C}$.

Les deux théorèmes d'inclusion ci-dessous sont, compte tenu des hypothèses faites sur Ω, vérifiés pour chacun des Ω_i. On les étend à Ω par exemple en utilisant les opérateurs $\hat{P}$ et R.

Théorème 1.3 : Quel que soit $q > 1$, $H^1(\Omega)$ est inclus dans $L^q(\Omega)$ et l'application identique de $H^1(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est compacte, donc continue de $H^1(\Omega)$ faible dans $L^q(\Omega)$ fort.

Théorème 1.4 : $\mathcal{C}(\Omega)$ désignant l'ensemble des fonctions p.p continues sur $\overline{\Omega}$ muni de la norme du vrai maximum, $H^2(\Omega)$ est inclus dans $\mathcal{C}(\Omega)$ avec injection compacte.

5 - Normes équivalentes dans $H^m(\Omega)$.

Inégalités de Poincaré.

Considérons l'espace de Beppo Lévy d'ordre m :

$$B\,L^m(\Omega) = \left\{ u \mid u \in \mathcal{D}'(\Omega) \; ; \; D^\alpha u \in L^2(\Omega) \; \forall \alpha : |\alpha| = m \right\}$$

muni de la semi norme $\| u \|_m$.

Soit $\mathcal{P}$ l'adhérence de zéro dans cet espace. Lorsque Ω est simple, $\mathcal{P}$ est l'ensemble des polynômes en x^1 et x^2 de degré strictement inférieur à m.

Lorsque Ω est manchon, $\mathcal{P}$ est l'ensemble des fonctions indépendantes de x_2 et polynôme en x_1 de degré strictement inférieur à m (recollement des morceaux).

<u>Théorème 1.6</u> : Soit B un espace de Hilbert et L un élément de $\mathcal{L}(H^m(\Omega) ; B)$, dont la réduction à $\mathcal{P}$ est injective. La fonction

$$\varphi(u) = \left(\| L u \|_B^2 + \| u \|_m^2 \right)^{1/2}$$

est une norme équivalente à la norme initiale sur $H^m(\Omega)$

<u>Démonstration</u>

Soit $B\,\dot{L}^m(\Omega)$ l'espace séparé associé à $B\,L^m(\Omega)$, c. a. d. l'espace quotient de $B\,L^m(\Omega)$ par $\mathcal{P}$. Cet espace est complet ([6] Chap. III), donc de Hilbert ; $H^m(\Omega)$ est inclus dans $B\,L^m(\Omega)$, et la réduction à $H^m(\Omega)$ de l'application canonique φ de $B\,L^m(\Omega)$ dans $B\,\dot{L}^m(\Omega)$ est continue.

Or, $u \in B\,L^m(\Omega)$ entraîne $D^\alpha u \in B\,L(\Omega)$, $\forall \alpha : |\alpha| = m - 1$, d'où on déduit, Ω étant de Nikodym, $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$, $\forall \alpha : |\alpha| = m - 1$. On constate de proche en proche que u et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre m sont dans $L^2(\Omega)$, donc que $B\,L^m(\Omega)$ est algébriquement identique

à $H^m(\Omega)$. Il en résulte que $B' L^m(\Omega)$ est algébriquement isomorphe à tout supplémentaire algébrique de $\mathcal{P}$ dans $H^m(\Omega)$, et en particulier au supplémentaire V orthogonal à $\mathcal{P}$ pour la norme de $H^m(\Omega)$. Or, $\mathcal{P}$ étant de dimension finie est fermé, V et $\mathcal{P}$ sont topologiquement supplémentaires et V est un Hilbert.

L'application φ, qui est linéaire continue et bijective de V sur $B' L^m(\Omega)$ est donc un isomorphisme topologique : notant $|||\, u \,|||_m$ la norme de u dans $H^m(\Omega)$, il existe donc $k_1 > o$ tel que

$$(1.4) \qquad |||\, v \,|||_m^2 \leq k_1 \, \| v \|_m^2 \qquad \forall v \in V$$

Soit u quelconque dans $H^m(\Omega)$, $u = v + p$ sa décomposition sur V et $\mathcal{P}$. On a $L u = L v + L p$, qui entraine, avec la continuité de L :

$$(1.5) \quad \| Lp \|_B^2 \leq 2 \left[\| Lu \|_B^2 + \| Lv \|_B^2 \right] \leq 2 \left[\| Lu \|_B^2 + k_2 \, |||\, v \,|||_m^2 \right] (k_2 > o)$$

L'application L, supposée linéaire continue et injective sur $\mathcal{P}$ de dimension finie est un isomorphisme de $\mathcal{P}$ sur $L(\mathcal{P})$; il existe donc k_3 tel que

$$(1.6) \qquad |||\, p \,|||_m^2 \leq k_3 \, \| Lp \|_B^2 \qquad \forall p \in \mathcal{P}$$

On déduit de (1.5) et (1.6) qu'il existe k_4 tel que

$$|||\, u \,|||_m^2 = |||\, v \,|||_m^2 + |||\, P \,|||_m^2 \leq k_4 \left(\| Lu \|_B^2 + |||\, v \,|||_m^2 \right)$$

Utilisant (1.4) et remarquant que $\| u \|_m = \| v \|_m$, on déduit qu'il existe k_5 tel que :

$$|||\, u \,|||_m^2 \leq k_5 \left(\| Lu \|_B^2 + \| u \|_m^2 \right) \qquad \forall u \in H^m(\Omega)$$

Une inégalité en sens inverse étant évidente, le résultat est établi.

Dans le cas $m = 1$, $\mathcal{P}$ se réduit à l'ensemble des fonctions constantes, et L est injectif si $L(1) \neq 0$. On peut compléter le théorème précédent par le suivant :

<u>Théorème 1.6</u> : Soient B un Hilbert et $L \in \mathcal{L}(H^1(\Omega) ; B)$ tel que $L(1) \neq 0$. Il existe des constantes C_1, C_2, C_3 telles que :

$$\| Lu \|_B^2 - \frac{(Lu, L1)_B^2}{\| L1 \|_B^2} \leq C_1 \| u \|_1^2 \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

$$\left.\begin{array}{l} \| u \|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_2 \| u \|_1^2 \\ \| u \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_3 \| u \|_1^2 \end{array}\right\} \quad \forall u \left\{\begin{array}{l} u \in H^1(\Omega) \\ (Lu, L1)_B = 0 \end{array}\right.$$

<u>Démonstration.</u>

Les deux dernières inégalités résultent immédiatement de la première et du théorème 1.5. Pour établir la première, il suffit de remarquer qu'il résulte de la démonstration du théorème 1.5 qu'il existe k_6 tel que

$$\| \dot{u} \|_{\dot{H}^1(\Omega)}^2 \leq k_6 \| \dot{u} \|_{\dot{BL}(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

or, $\| \dot{u} \|_{\dot{H}^1(\Omega)} = \inf_{p \in \mathcal{P}} \| u + p \|_{H^1(\Omega)}^2 = \inf \left[\| Lu + Lp \|_B^2 + \| u \|_1^2 \right]$

on a donc : $\inf_{p \in \mathcal{P}} \| Lu + p L1 \|_B^2 \leq k_7 \| u \|_1^2$

Or : $\| Lu + p L1 \|_B^2 = \| Lu \|_B^2 + 2p (Lu, L1)_B + p^2 \| L1 \|_B^2$

est un trinôme du second degré en p, dont le minimum vaut

$\| Lu \|_B^2 - \dfrac{(Lu, L1)_B^2}{\| L1 \|_B^2}$, ce qui établit le théorème.

Applications.

1.1 - Prenant pour B l'espace $L^2(\Omega)$ et pour L l'application identique de $H^m(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, le théorème 1.5 montre que $(\| u\|_0^2 + \| u\|_m^2)^{1/2}$ est une norme sur $H^m(\Omega)$ équivalente à la norme initiale, et la première inégalité du théorème 1.6 s'écrit :

$$\| u\|_0^2 - \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \left| \int_\Omega u \, dx \right|^2 \leq C_1 \| u \|_1^2 \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

qui n'est autre que l'extension aux ouverts sur un cylindre de l'inégalité de Poincaré.

1.2 - Résultats analogues en prenant pour B l'espace $L^2(\Omega_1)$ avec $\Omega_1 \subset \Omega$

1.3 - Prenant $B = L^2(\Gamma_1)$, où Γ_1 est une courbe C^1 inclue dans $\overline{\Omega}$, et pour opérateur L l'opérateur $u \to \gamma_1 u$, trace de u sur Γ_1, le théorème 1.5 redonne un résultat établi en [10].

1.4 - On déduit du théorème 1.6, que $\| u \|_1$ est une norme équivalente à la norme initiale : sur le sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$ des fonctions telles que $\gamma_1 u = 0$, sur celui des fonctions telles que $\int_{\Gamma_1} \gamma_1 u \, d\sigma_1 = 0$, et par conséquent aussi sur $H_0^1(\Omega)$ qui est inclus dans les précédents lorsque $\Gamma_1 \subset \Gamma$

6 - Espace $\mathcal{V}$

a - Définitions

Soient $\mathcal{V} = \left[H^1(\Omega) \right]^2$, muni de la structure d'espace produit, $u = (u_1, u_2) \in \mathcal{V}$

On pose : $\| u \|_i = \left[\| u_1\|_i^2 + \| u_2 \|_i^2 \right]$. On a :

(1.7) $\quad \| u \|_{\mathcal{V}}^2 = \| u \|_0^2 + \| u \|_1^2$

Soit Λ l'espace $\left[L^2(\Omega) \right]^4$. Un élément β de cet espace est noté

$\beta = (\beta_{ij}) = (\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21}, \beta_{22})$ avec $\beta_{ij} \in L^2(\Omega)$

Soit s l'application de $\mathcal{V}$ dans Λ définie par

$$(1.8) \qquad s_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right]$$

On pose : $S(u,v) = (s(u), s(v))_\Lambda = \sum_{i,j=1}^{2} (s_{ij}(u), s_{ij}(v))_0^2$ et $S(u) = S(u,u)$

On vérifie que $S(u,v)$ est bilinéaire sur $\mathcal{V}$ et vérifie

$$(1.9) \qquad |S(u, v)| \leq \| u \|_1 \| v \|_1 \qquad \forall u, v \in \mathcal{V}$$

$\left[S(u)\right]^{1/2}$ est donc une semi norme sur $\mathcal{V}$ moins fixe que $\| u \|_1$

b - <u>Noyau $\mathcal{N}$ de l'application $u \to S(u)$</u>

Soit u tel que $s_{ij}(u) = 0$, $i, j = 1, 2$. On a alors dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, et pour tout i, k, ℓ :

$$(1.10) \qquad \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^k \partial x^\ell} = \frac{\partial}{\partial x^\ell}(s_{ik}(u)) + \frac{\partial}{\partial x^k}(s_{i\ell}(u)) - \frac{\partial}{\partial x^i}(s_{k\ell}(u)) = 0$$

Supposons d'abord Ω simple : Ω étant connexe, on déduit de (1.10) que u_i est de la forme : $u_i = \sum_{j=1}^{2} a_{ij} x^j + b_i$ où les a_{ij} et b_i sont des constantes. De plus, $s_{ij}(u) = 0$ impose aux a_{ij} d'être antisymétriques. Donc

$$\mathcal{N} = \left\{ u = a(x^2, -x^1) + (b_1, b_2) \; ; \; a, b_1, b_2 \in R \right\}$$

Lorsque Ω est manchon, u est de la forme précédente sur tout Ω^* simple et contenu dans Ω. La condition de recollement impose en outre aux différentes constantes d'être indépendantes de Ω^* et au coefficient de x^2 d'être nul. $\mathcal{N}$ se réduit donc à l'ensemble des éléments constants :

$$\mathcal{N} = \left\{ u = (b_1, b_2) \; ; \; b_i \in R \right\}$$

c - Théorème 1.7

Soit $\mathcal{V}_s$ l'espace $\mathcal{V}$ muni de la topologie induite par la semi norme $S(u)^{1/2}$. Les espaces topologiques quotients $\mathcal{V}_s/\mathcal{N}$ et $\mathcal{V}/\mathcal{N}$ sont identiques

Démonstration (4)

Point 1

Il faut établir qu'il existe C_1 et C_2 positifs tels que

$$(1.11) \qquad C_1 \; S(u) \leq \inf_{n \in \mathcal{N}} \| u + n \|^2_{\mathcal{V}} \leq C_2 \, S(u) \qquad \forall u \in \mathcal{V}$$

La première inégalité est évidente, puisque d'après (1.9) :

$$S(u) = S(u+n) \leq \| u + n \|_1^2 \leq \| u + n \|^2_{\mathcal{V}} \quad \forall n \in \mathcal{N} \text{ et } u \in \mathcal{V}$$

Il reste d'onc à établir la seconde.

Point 2

Des intégrations par parties dans le calcul de $S(u)$ montrent que l'on a (remarquer que $\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, que Ω soit simple ou non) :

$$S(u) = \frac{1}{2} \| u \|_1^2 + \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right\|_0^2 \qquad \forall u \in \left[\mathcal{D}(\Omega) \right]^2 \subset \mathcal{V}$$

Ce résultat s'étend immédiatement à $V_0 = \left[H_0^1(\Omega) \right]^2$ par densité.

Remarquant que $\| u \|_1$ est sur V_0 une norme équivalente à la norme initiale, on voit que (1.11) est vérifiée pour $u \in V_0$

Il suffit donc d'établir (1.11) sur un supplémentaire topologique $\hat{\mathcal{V}}$ de V_0 dans $\mathcal{V}$.

---

(4) Des résultats analogues dans des cas particuliers ou différents ont été établis dans [7] (théorème 2.V) et [9]. La démonstration donnée ici est identique de celle donnée dans [9]

Point 3 - Choix de $\hat{\mathcal{V}}$

. Il résulte du point précédent que la forme bilinéaire continue $S(u, v)$ est coercive sur V_0. On en déduit, d'après le théorème de Lax Milgram (Cf aussi [10]) que l'application associée $A \in \mathcal{L}\left[(\mathcal{V} ; \mathcal{D}'(\Omega))\right]$ définie par

$$< A u, \varphi > = S(u, \varphi) \qquad \forall \varphi \in \left[\mathcal{D}(\Omega)\right]^2$$

où le crochet $< , >$ désigne la dualité entre $\left[\mathcal{D}(\Omega)\right]^2$ et $\left[\mathcal{D}'(\Omega)\right]^2$

est un isomorphisme de V_0 sur son dual $V^{-1} = \left[H^{-1}(\Omega)\right]^2$

Le noyau de A est donc un supplémentaire topologique de V_0, que nous prendrons pour espace $\hat{\mathcal{V}}$. On remarquera que $A = -\frac{1}{2}(\Delta + \text{grad}(\text{div}))$; il s'agit de l'opérateur de l'élasticité plane.

Point 4

On doit donc établir (1.11) avec $u \in \mathcal{V}$ et $A u = 0$

Dans le cas d'un ouvert manchon, le noyau $\mathcal{N}$ est l'ensemble des éléments constants, et $\mathcal{V}/_{\mathcal{N}}$ n'est autre que $\left[\dot{H}(\Omega)\right]^2$ dont la norme est $\| \dot{u} \|_1$ (cf démonstration du théorème 1.5). Il suffit alors d'établir :

$$(1.12) \quad \begin{cases} \exists\, k > 0 \text{ tel que } S(u) \geq k \| u \|_1^2 \\ \forall u \in F = \left\{ u \mid u \in \mathcal{V},\ A u = 0 \right\} \end{cases}$$

Dans le cas d'un ouvert simple, on a :

$$\inf_{n \in \mathcal{N}} \|u + n\|_{\mathcal{V}} = \inf_{a \in R} \left[\inf_{b_1, b_2 \in R} \|u + a(x^2, -x^1) + (b_1, b_2)\|_{\mathcal{V}} \right]$$

$$= \inf_{a \in R} \|u + a(x^2, -x^1)\|_1$$

puisque le crochet n'est autre que la norme de $u + a\,(x^2, -x^1)$ dans $\left[H^1(\Omega)\right]^2$

Soit $\bar{\mathcal{V}}$ le sous-espace fermé de $\mathcal{V}$ défini par :

$$\bar{\mathcal{V}} = \left\{ u \mid u \in \mathcal{V} \; ; \; (u, (x^2, -x^1))_1 = \int_\Omega \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) dx = 0 \right\}$$

Posons pour tout $u \in \mathcal{V}$:

$$u = \bar{u} + \alpha\,(x^2, -x^1) \;, \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{(u, (x^2, -x^1))_1}{\| (x^2, -x^1) \|_1^2}$$

On vérifie que $\bar{u} \in \bar{\mathcal{V}}$, et que par conséquent :

$$\| u + a\,(x^2, -x^1) \|_1^2 = \| \bar{u} \|_1^2 + \|(a + \alpha)\,(x^2, -x^1)\|_1^2$$

a pour minimum lorsque a décrit R, la quantité $\| \bar{u} \|_1^2$

Il suffit donc d'établir dans ce cas :

$$(1.12\,\text{bis}) \begin{cases} \exists\, k > 0 \text{ tel que } S(u) \geq k \| u \|_1^2 \\ \forall\, u \in F = \left\{ u \mid u \in \mathcal{V} \,,\; A\,u = 0, \;\; u \in \bar{\mathcal{V}} \iff \int_\Omega \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial u_2}{\partial x^1}\right) dx = 0 \right\} \end{cases}$$

<u>Point 5</u>

Supposons que les relations (1.12) ne soient pas vérifiées. Il existe alors une suite $u^n \in F$ telle que $\| u^n \|_1 = 1$ et $S\,(u^n) \to 0$, donc telle que $s_{ij}\,(u^n) \to 0$ dans $L^2\,(\Omega)$ $\forall\, i, j = 1, 2$.

Avec les notations du théorème 1.6 (où, pour fixer les idées, B a par exemple été choisi comme dans l'application 1.3) posons :

$$v_\ell^n = u_\ell^n - c_\ell^n \text{ avec } c_\ell^n = \frac{(L\,u_\ell^n \,,\, L\,1)_B}{\| L\,1 \|_B^2}$$

qui entraîne : $(L\,v_\ell^n, L\,1)_B = 0$ donc $\| u_\ell^n \|_1^2 = \| v_\ell^n \|_1^2 \geq C_2 \| v_\ell^n \|_{H^1}^2$

d'après le théorème 1.6 .

On en déduit : $1 = \| v^n \|_1^2 \geq C_2 \| v^n \|_{\mathcal{V}}$: la suite v^n est bornée dans l'espace de Hilbert $\mathcal{V}$. On peut en extraire une sous suite v^ν, convergent vers un élément v de $\mathcal{V}$, faiblement dans $\mathcal{V}$ donc fortement dans $(L^2(\Omega))^2$ (Théorème 1.3), et par suite dans $(\mathcal{D}'(\Omega))^2$

Etendant le domaine de définition de s à $(\mathcal{D}'(\Omega))^2$ en utilisant les dérivées distributions opérateurs continus de $\mathcal{D}'(\Omega)$, on déduit que $s_{ij}(v^\nu)$ tend vers $s_{ij}(v)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Or, $s_{ij}(v^\nu) = s_{ij}(u^\nu)$ tend vers zéro dans $L^2(\Omega)$ donc dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. On en déduit que $s_{ij}(v)$ est nul, c'est à dire que $v \in \mathcal{N}$.

Si Ω est manchon, $v \in \mathcal{N}$ est un élément constant $b = (b_1, b_2)$.

Si Ω est simple, v est de la forme : $b + a(x^2, -x^1)$. Mais la suite u^n, donc aussi la suite v^ν, est dans le sous espace fermé $\bar{\mathcal{V}}$.

Sa limite faible v est donc aussi dans $\bar{\mathcal{V}}$, et par suite a est nul.

Quel que soit Ω, v est donc une constante $b = (b_1, b_2)$

Point 6

v^ν est solution de $A u = 0$, l'opérateur A est à coefficients constants et v^ν tend vers b dans $\left[\mathcal{D}'(\Omega)\right]^2$. On en déduit que v^ν tend vers b dans l'espace $\mathcal{E}$ des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω à valeurs dans R^2, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de la fonction et de chacune de ses dérivées (Cf : [6] page 143 et les opérateurs R et $\hat{P}$)

Point 7

Il résulte des hypothèses faites sur Ω que Ω est la réunion d'un nombre

fini p d'ouverts Ω_ℓ simples et de Friedrichs (5). C'est à dire, en posant pour tout $u^{(\ell)} \in \left[B L (\Omega_\ell) \right]^2$ et pour tout compact $K \subset \Omega_\ell$:

$$r_{ij} (u^{(\ell)}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(\ell)}}{\partial x^j} - \frac{\partial u_j^{(\ell)}}{\partial x^i} \right) ; \; R (u^{(\ell)}) = \| r (u^{(\ell)}) \|_\Lambda^2$$

$$R_K (u^{(\ell)}) = \sum_{i,j=1}^{2} \int_K |r_{ij} (u^{(\ell)}) |^2 \, d x$$

qu'il existe p compacts $K_\ell \subset \Omega_\ell$ et p constantes C_ℓ tels que

$$(1.13) \quad R (u^{(\ell)}) \leq C_\ell \left[R_{K\ell} (u^{(\ell)}) + S (u^{(\ell)}) \right] \; \forall \, u^{(\ell)} \text{ solution de } A u^{(\ell)} = 0$$

La relation (1.13) est en particulier vérifiée par $v^{\nu(\ell)}$, restric- à Ω_ℓ de v^ν, qui tend vers b dans $\mathcal{E} (\Omega_\ell)$. Les dérivées partielles $\frac{\partial v_i^{\nu(\ell)}}{\partial x^j}$ tendent donc vers zéro uniformément sur tout compact, et en particulier sur K_ℓ . On en déduit que $R_{K\ell} (v^{\nu(\ell)})$ tend vers zéro. D'après (1.13), et puisque $S (v^{\nu(\ell)})$ tend vers zéro, on voit que $R (v^{\nu (\ell)})$ tend vers zéro.

Il en résulte : $\| v^{\nu(\ell)} \|_1 = S (v^{\nu(\ell)}) + R (v^{\nu (\ell)}) \to 0, \quad \ell = 1 \ldots p.$

Les Ω_ℓ recouvrant Ω, on en déduit que $\| v^\nu \|_1$ tend vers zéro, ce qui est contraire à l'hypothèse : $\| u^\nu \|_1 = \| v^\nu \|_1 = 1$. Le théorème est établi

---

(5) Pour la définition des ouverts de Friedrichs, voir [7] et [9] . K. O. Friedrichs, dans [8], a établi des conditions suffisantes pour qu'un ouvert de R^n soit de Friedrichs. Il en est ainsi en particulier pour les ouverts de type " parallélépipède " dont les faces sont des variétés (n - 1) de classe C^2, donc pour les ouverts utilisés ici.

d - Théorème 1.8

Soit B un espace de Hilbert, L une application linéaire continue de $\mathcal{V}$ dans B dont la réduction au noyau $\mathcal{N}$ de S est injective.

La quantité $\varphi(u) = \left[\| Lu \|_B^2 + S(u) \right]^{1/2}$ est une norme sur $\mathcal{V}$ équivalente à la norme initiale.

Démonstration

La continuité et les linéarités de L et S entraînent évidemment qu'il existe k tel que $\varphi(u) \leq k \| u \|_{\mathcal{V}}^2 \quad \forall u \in \mathcal{V}$

Il suffit d'établir une inégalité en sens inverse, ce qui résultera du théorème 1.7.

Décomposant $\mathcal{V}$ en somme directe de $\mathcal{N}$ et de son supplémentaire $\mathcal{N}^\perp$ orthogonal pour la norme initiale, et posant u = n + v la décomposition correspondante, on a pour tout $u \in \mathcal{V}$:

(1.14) $\| u \|_{\mathcal{V}}^2 = \| n \|_{\mathcal{V}}^2 + \| v \|_{\mathcal{V}}^2$

Or, $\mathcal{N}^\perp$ est isomorphe à $\mathcal{V}/\mathcal{N}$ dont $\left[S(u) \right]^{1/2}$ est une norme. Il existe donc k_1 tel que

(1.15) $\| v \|_{\mathcal{V}}^2 \leq k_1 S(v)$

Par ailleurs, L étant injectif et continu sur $\mathcal{N}$ de dimension finie est bicontinue : il existe k_2 tel que $\| n \|_{\mathcal{V}}^2 \leq k_2 \| L n \|_B^2$

Donc : $\| n \|_{\mathcal{V}}^2 \leq 2k_2 (\| Lu \|_B^2 + \| Lv \|_B^2) \leq k' (\| Lu \|_B^2 + \| v \|_{\mathcal{V}}^2)$

où la dernière inégalité résulte de la continuité de L

Repportant dans (1.14), puis tenant compte de (1.15) et remarquant que S (u) = S (v), on obtient : $\| u \|_{\mathcal{V}}^2 \leq k'' (\| lu \|_B^2 + S(u))$, ce qui établit le résultat.

On remarque que la démonstration est en tout point identique à la fin de la démonstration du théorème 1.5

<u>Remarque</u> - Dans le cas d'un ouvert manchon, la condition d'injectivité se traduit par : L (1,0) et L (0,1) sont linéairement indépendants dans B. Le théorème est alors conséquence directe des théorèmes 5 et 7.

<u>Exemples</u>

1°) - Soient Γ_1 et Γ_2 deux courbes C^1 contenues dans Γ, γ_i les opérateurs trace associés, $B = \prod_{i=1}^{2} L^2(\Gamma_i)$ et $L = (\gamma_1, \gamma_2)$. L'opérateur L est continu puisque les γ_i le sont sur $H^1(\Omega)$. Montrons que L est injectif sur $\mathcal{N}$ (les termes soulignés sont à considérer quand Ω est simple, et à omettre quand Ω est manchon): Soient λ, μ et $\underline{\nu}$ dans R, tels que

$$\lambda L(1,0) + \mu L(0,1) + \nu \underline{L(x^2,-x^1)} = (\gamma_1(\lambda + \underline{\nu x^2}), \gamma_2(\mu - \underline{\nu x^1}))$$

soit nul. Cela signifie que $\lambda + \underline{\nu x^2} = 0$ p. p. sur Γ_1, et que $\mu - \underline{\nu x^1} = 0$ p. p. sur Γ_2, qui entraîne que λ, μ et $\underline{\nu}$ sont nuls, à condition toutefois dans le cas d'un ouvert Ω simple, que Γ_1 ne soit pas entièrement sur une génératrice, ou que Γ_2 ne soit pas entièrement sur un parallèle. Supposant cette condition réalisée pour les ouverts simples, on voit que L est injectif sur $\mathcal{N}$. On a donc par application su théorème 1.8 :

$$\left(\| \gamma_1 u_1 \|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \| \gamma_2 u_2 \|^2_{L^2(\Gamma_2)} + S(u)\right)^{1/2}$$

est une norme sur $\mathcal{V}$ équivalente à la norme initiale.

Ou encore : $(S(u))^{1/2}$ est une norme équivalente sur l'ensemble des $u \in \mathcal{V}$ tels que $\gamma_1 u_1 = 0$ et $\gamma_2 u_2 = 0$

2°) - Dans le cas d'un ouvert manchon, prendre $B = R^2$ et $L = (L_1, L_2)$ avec

$$L_i\, u_i = (\gamma_i\, u_i, 1)_{L^2(\Gamma_i)} = \int_{\Gamma_i} \gamma_i\, u_i\, d\,\sigma_i$$

3°) - Prendre $B = (L^2(\Omega))^2$ et pour L l'application identique.

On a alors la norme équivalente : $\left[\| u \|_0^2 + S(u) \right]^{1/2}$

CHAPITRE II

EQUATIONS DES COQUES

Sommaire

Dans le paragraphe 1 sont introduites les caractéristiques géométriques de la surface moyenne de l'élément de coque étudié (1-a). On précise ensuite la façon dont un champ de vecteur ou de tenseur défini sur la surface moyenne est caractérisé par un élément d'un espace fonctionnel introduit au chapitre I (par leurs coordonnées covariantes) et on tire les conséquences immédiates qui en résultent pour les coordonnées de variance différente (lemmes 21-22-23-24)

Le paragraphe 2 définit différentes fonctionnelles dans $\mathcal{V}^0 = \left[H^1(\Omega)\right]^2 \times H^2(\Omega)$ (espace caractérisant les déplacements de la surface moyenne), et donne la signification mécanique de ces fonctionnelles (2-c). En (2-b), les fonctionnelles en question sont précisées dans le cas d'une coque homogène en épaisseur.

Le paragraphe 4 précise les types de montages matériels et de charges étudiés, et pose les problèmes de l'équilibre de ces montages en termes d'analyse fonctionnelle, sous forme variationnelle.

Le paragraphe 5 donne quelques exemples concrets partiels facilitant la compréhension et l'utilisation pratique de l'outillage mathématique mis en oeuvre.

Les paragraphes 6 et 7 traitent en détail un montage type qui sera repris tout au long de ce travail, et donnent l'interprétation (formelle) dans ce cas particulier du problème variationnel sous forme de système d'équations aux dérivées partielles avec conditions aux limites géométriques et dynamiques.

On se propose d'étudier les déformations d'un morceau de coque mince élastique dont la surface moyenne est l'image d'un ouvert Ω du cylindre S, du type précisé en I, dans une application $P \in S \to \Pi$ avec $\overrightarrow{O\Pi} = L\, \overrightarrow{f(P)}$ où L est une longueur donnée et où $\vec{f}$ est à valeur dans R^3 euclidien, de classe C^1 sur $\bar{\Omega}$, et par exemple C^2 par morceaux sur $\bar{\Omega}$ (voir note (7))

Cela concerne en particulier toutes les coques cylindriques, coniques, qu'elles soient manchon ou non, et plus généralement toutes les coques dont la surface moyenne est topologiquement équivalente.

Les équations des coques que nous utiliserons sont géométriquement non linéaires, mais classiques. Elles ont été utilisées initialement par L H DONNELL [11] dans le cas de coques cylindriques homogènes d'épaisseur constante. Elles sont dues sous la forme exposée ici et dans le cas général à W. T. KOITER [12] . Elles sont valables pour des coques minces élastiques, dans le cas de déplacements petits mais non infiniment petits (6), les extensions restant dans le domaine de la loi de Hooke en tout point.

---

(6) Plus précisément, lorsque le déplacement $\overrightarrow{u(\Pi)}$ est tel que les extensions dans le déplacement $\lambda\, \overrightarrow{u(\Pi)}$ restent dans le domaine de la loi de Hooke pour tout $\lambda \in (0, 1)$.

Nous nous plaçons dans l'approximation supplémentaire des coques de faible courbure, ce qui, pour des raisons de validité pratique des résultats, limite le champ des possibilités pour $\vec{f}$ évoqué précédemment.

1 - Coordonnées, repères locaux

a) On désigne par Σ et $\bar{\Sigma}$ les images de Ω et $\bar{\Omega}$ dans $\vec{f}$. On pose $\vec{OM}(P) = \vec{f}(P)$. On suppose que les coordonnées locales (x^1, x^2) de P sur S constituent un système de coordonnées locales régulier en tout point de $\bar{\Sigma}$ On désigne par (cf : [13] , [14] , [15]) :

$\vec{a}_\alpha = \dfrac{\partial \vec{M}}{\partial x^\alpha}$ la base locale associée à ces coordonnées

$a_{\alpha\beta} = \vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_\beta$ le tenseur métrique covariant de Σ associé

$a = a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2$ le déterminant des $a_{\alpha\beta}$

Toute fonction $g(x)$ continue sur $\bar{\Omega}$ est bornée, et toute fonction $g(x)$ continue et strictement positive en tout point de $\bar{\Omega}$ est bornée inférieurement par une constante strictement positive notée $\bar{g}$.

En particulier, $\vec{f}$ étant continue et le système de coordonnées étant régulier en tout point de $\bar{\Omega}$, les coefficients $a_{\alpha\beta}$ sont bornés sur $\bar{\Omega}$ et les coefficients $a_{\alpha\beta}$ (sans sommation) et a vérifient :

$$a_{\alpha\alpha} \geq \bar{a}_{\alpha\alpha} > 0 \quad ; \quad a \geq \bar{a} > 0 \; ; \quad a^{\alpha\alpha} \geq \bar{a}^{\alpha\alpha} > 0$$

b) Soit $\vec{u}(x)$ un champ de vecteurs de surface sur Σ, $u^\alpha(x)$ ses composantes contravariantes, $u_\alpha(x) = a_{\alpha\beta}\, u^\beta$ ses composantes covariantes.

On associe à $\vec{u}$ l'application : $x \to u(x) = (u_1(x), u_2(x))$ définie sur Ω, à valeurs dans R^2, et inversement.

<u>Lemme 2.1</u> - La fonctionnelle positive définie par $\varphi(u)$:

$$\varphi^2(u) = \int_\Sigma \vec{u}^2 \, d\sigma = \int_\Omega a^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta \sqrt{a} \, dx^1 \, dx^2 = \int_\Omega u^\alpha u_\alpha \sqrt{a} \, dx^1 \, dx^2$$

est une norme sur $\left[L^2(\Omega)\right]^2$ équivalente à la norme classique.

<u>Démonstration</u> .

On vérifie immédiatement que $\varphi(u)$ est une semi norme et que, puisque les $a_{\alpha\beta}$, $a^{\alpha\beta}$, a et $\frac{1}{a}$ sont bornés, on a :

$$\varphi^2(u) \leq K_1 \int_\Omega \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} u_\alpha u_\beta \, dx^1 \, dx^2 \leq K_2 \sum_{\alpha=1}^{2} \| u_\alpha \|_0^2 = K_2 \| u \|^2_{(L^2)^2}$$

Il suffit donc d'établir une inégalité en sens inverse. On a :

$$a^{\lambda\mu} u_\lambda u_\mu \geq a^{11} (u_1)^2 + a^{22} (u_2)^2 - 2 \, |a^{12}| \, |u_1 u_2|$$

$$\geq (a^{11} - \alpha |a^{12}|)(u_1)^2 + (a^{22} - \frac{1}{\alpha} |a^{12}|)(u_2)^2 \quad , \quad \forall \ \alpha > 0$$

Pour $\alpha = \sqrt{a^{11} / a^{22}}$, il vient :

$$a^{\lambda\mu} u_\lambda u_\mu \geq \alpha \left(\sqrt{a^{11} a^{22}} - |a^{12}|\right) (u_1)^2 + \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{a^{11} a^{22}} - |a^{12}|\right)(u_2)^2$$

Les coefficients de $(u_1)^2$ et $(u_2)^2$ sont continus et positifs sur $\overline{\Omega}$, donc bornés inférieurement par une constante $k_1 > 0$.

On déduit alors :

$$\int_\Omega a^{\lambda\mu} u_\lambda u_\mu \sqrt{a} \, dx^1 \, dx^2 \geq k_1 \sqrt{\bar{a}} \int_\Omega \left[(u_1)^2 + (u_2)^2\right] dx^1 \, dx^2 = k_2 \| u \|^2_{(L^2)^2}$$

Le lemme est ainsi établi.

<u>Lemme 2.2</u> - La fonctionnelle $\left[\sum_{\alpha=1}^{2} \| u^{\alpha} \|_{o}^{2}\right]^{1/2}$ est dans $\left[L^{2}(\Omega)\right]^{2}$ une norme équivalente à la norme classique.

<u>Démonstration.</u>

Il est d'abord évident que $u^{\alpha} \in L^{2}(\Omega)$. On démontre que la fonctionnelle est une norme équivalente à $\varphi(u)$, ce qui établit le lemme, de la même façon que l'on a démontré le lemme précédent, mais en utilisant les composantes $a_{\alpha\beta}$ du tenseur métrique.

c) Soit $\bar{\bar{u}}(x)$ un champ de tenseur d'ordre deux défini sur Σ. On lui associe la fonction : $x \to u(x) = (u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22})$, où les $u_{\alpha\beta}(x)$ sont les composantes covariantes de $\bar{\bar{u}}(x)$

<u>Lemme 2.3</u> - Si u est dans $\Lambda = \left[L^{2}(\Omega)\right]^{4}$, les composantes de variance quelconques de $\bar{\bar{u}}$ sont toutes dans $L^{2}(\Omega)$, et les fonctionnelles φ_1 et φ_2 :

$$\varphi_1(u) = \left[\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \| u^{\alpha\beta} \|_{o}^{2}\right]^{1/2}$$

$$\varphi_2(u) = \left[\int_{\Sigma} \bar{\bar{u}}^{2}\, d\sigma\right]^{1/2} = \left[\int_{\Omega} a^{\alpha\beta}\, a^{\lambda\mu}\, u_{\alpha\lambda}\, u_{\beta\mu} \sqrt{a}\, d x^{1} d x^{2}\right]^{1/2} = \left[\int_{\Omega} u^{\alpha\beta}\, u_{\alpha\beta} \sqrt{a}\, d x\right]^{1/2}$$

sont des normes sur Λ équivalentes à la norme initiale :

$$\left[\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \| u_{\alpha\beta} \|_{o}^{2}\right]^{1/2}$$

<u>Démonstration.</u>

Comme pour les lemmes 2.1 et 2.2, l'équivalence de φ_1 résultera de celle de φ_2, pour laquelle la seule chose non immédiate à établir est l'existence de $k > 0$ tel que : $\varphi_1^{2}(u) \geq k \|u\|_{\Lambda}^{2} \quad \forall u \in \Lambda$.

Pour établir cette relation, on peut utiliser la même méthode que pourle lemme 2.1 . Toutefois, cette méthode devenant fastidieuse, on procè-

dera ainsi :

Soient $\mathcal{B}$ la sphère unité de R^4, et $v = (v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{22})$ un élément de cette sphère

L'application : $(x, v) \to a^{\alpha\beta}(x)\ a^{\lambda\mu}(x)\ v_{\alpha\lambda}\ v_{\beta\mu}$ est continue sur le fermé $\bar{\Omega} \times \mathcal{B}$, donc atteint son minimum m en un point (x_0, v_0) ; on a donc la relation

$$(2.1) \qquad a^{\alpha\beta}(x)\ a^{\lambda\mu}(x)\ v_{\alpha\lambda}\ v_{\beta\mu} \geq m = a^{\alpha\beta}(x_0)\ a^{\lambda\mu}(x_0)\ v_{0\alpha\lambda}\ v_{0\beta\mu} \qquad \forall \begin{cases} x \in \bar{\Omega} \\ v \in \mathcal{B} \end{cases}$$

Or, m n'est autre que le double produit contracté $\left[\bar{\bar{v}}_0\right]^2$ du tenseur $\bar{\bar{v}}_0$ dont les coordonnées covariantes dans la base locale de x_0 sont les $v_{0\alpha\beta}$. Or, $v_{0\alpha\beta}$ appartenant à $\mathcal{B}$ est non nul, donc $\bar{\bar{v}}_0$ est non nul, et par suite $m = \left[\bar{\bar{v}}_0\right]^2$ est strictement positif.

De (2.1) on déduit :

$$a^{\alpha\beta}(x)\ a^{\lambda\mu}(x)\ u_{\alpha\lambda}(x)\ u_{\beta\mu}(x) \geq m \left\| u_{\alpha\beta}(x) \right\|^2_{R^4}$$

Multipliant par $\sqrt{a}$, que l'on borne inférieurement par $\sqrt{\bar{a}}$, on obtient la relation cherchée avec $k = m\sqrt{\bar{a}}$.

d) Les coefficients $a_{\alpha\beta}$ sont de classe C^1 par morceaux sur $\bar{\Omega}$, donc admettent des dérivées distributions $a_{\alpha\beta,\gamma} = \dfrac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}$ qui appartiennent à $L^\infty(\Omega)$ (voir note (7)). Soit $\vec{u}$ un champ de vecteurs de surface de Σ, tel que $u = (u_1, u_2) \in \left[L^2(\Omega)\right]^2$.

Les quantités suivantes (composantes du tenseur dérivée covariante de $\vec{u}$) ont un sens dans $\mathcal{D}'(\Omega)$:

$$u_{\alpha|\beta} = u_{\alpha,\beta} - A^{\lambda}_{\alpha\beta}\, u_{\lambda} \;;\; u^{\alpha}{}_{|\beta} = u^{\alpha}{}_{,\beta} + A^{\alpha}_{\lambda\beta}\, u^{\lambda} = a^{\alpha\gamma}\, u_{\gamma|\beta}$$

avec : $u_{\alpha,\beta} = \dfrac{\partial u_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}$, $A^{\lambda}_{\alpha\beta} = \dfrac{1}{2}\, a^{\lambda\mu}\,(a_{\alpha\mu,\beta} + a_{\beta\mu,\alpha} - a_{\alpha\beta,\mu})$

(coefficients de Christoffel de seconde espèce)

Lemme 2.4 -

1 - Si u est dans $\mathcal{V} = \left[H^1(\Omega)\right]^2$, alors $u^{\alpha}{}_{,\beta}$, $u_{\alpha|\beta}$ et $u^{\alpha}{}_{|\beta}$ sont dans $L^2(\Omega)$

2 - Réciproquement, si u_{α} et $u_{\alpha|\beta}$ sont dans $L^2(\Omega)$ pour tout α et tout β , alors u est dans $\mathcal{V}$

3 - La quantité : $\left[\sum_{\alpha=1}^{2} \|u_{\alpha}\|_0^2 + \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \|\frac{1}{2} u_{\alpha|\beta} + \frac{1}{2} u_{\beta|\alpha}\|_0^2\right]^{1/2}$

est une norme équivalente à la norme initiale sur $\mathcal{V}$

Démonstration.

Les points 1 - et 2 - sont évidents. Le point 3 - résulte immédiatement de l'application numéro trois du théorème 1.8 et de la relation :

$$u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha} = u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} - A^{\lambda}_{\alpha\beta}\, u_{\lambda}$$

Utilisant les paragraphes b et c , on voit que l'on peut utiliser dans les deux dernières points des composantes de variance différente .

e) L'application $\vec{f}$ étant de classe C^1 , il existe en tout point M de $\overline{\Sigma}$ un vecteur normal unité $\vec{a}_0$ tel que $\left[M, \vec{a}_i\right]$ (i = 0, 1, 2) constitue une base locale directe de R^3

2 - Déplacements - Déformations - Energie -

a) Déplacements

Soit $\overrightarrow{\pi\pi'}$ le déplacement du point π au cours d'une déformation de la coque. On pose :

$$\overrightarrow{\pi\pi'} = \frac{L}{\mu}\,(u^1\,\vec{a}_1 + u^2\,\vec{a}_2) + L\,u^0\,\vec{a}_0$$

où $\mu \in R$ est une constante très grande devant 1, telle que l'épaisseur de la coque soit de l'ordre de L/μ.

La déformation de la coque est ainsi caractérisée par un champ de vecteurs de surface $u^\alpha \vec{a}_\alpha$ et une fonction scalaire u^0.

Les différentes grandeurs physiques liées à cette déformation apparaissent comme des fonctionnelles de $u^\alpha \vec{a}_\alpha$ et u^0, c'est à dire de $u = (u_1, u_2, u^0)$, fonction définie sur Ω à valeur dans R^3, où les u_α sont les coordonnées covariantes de $u^\alpha \vec{a}_\alpha$.

Pour que ces fonctionnelles aient un sens, il conviendra de choisir u dans un espace suffisemment petit. Nous vérifierons qu'il suffit de choisir u dans $\mathcal{W} = \mathcal{V} \times H^2(\Omega)$, ce que nous ferons.

On notera aussi : $u = (u_0, u^0)$, avec $u_0 = (u_1, u_2) \in \mathcal{V}$ et $u^0 \in H^2(\Omega)$, un élément de $\mathcal{W}$

b) On définit les fonctionnelles suivantes

λ : élément de $\mathcal{L}(\mathcal{W}; \Lambda)$ défini par $\lambda_{\alpha\beta}(u) = -\mu\, b_{\alpha\beta}\, u^0$ où $b_{\alpha\beta}$ est la seconde forme fondamentale de Σ

$\vec{f}$ étant C^2 par morceaux, les coefficients $b_{\alpha\beta}$ sont continus par morceaux donc bornés sur $\overline{\Omega}$ et appartiennent à $L^\infty(\Omega)$

L'application λ est donc bien à valeurs dans Λ (7).

---

(7) On peut remplacer l'hypothèse : "f C^2 par morceaux" par l'hypothèse plus faible : $a_{\alpha\beta,\gamma} \in L^\infty(\Omega)$ et $b_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$, $\forall\, \alpha, \beta, \gamma$.

σ : élément de $\mathcal{L}(\mathcal{W}; \Lambda)$ défini par $\sigma_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{2}(u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha})$

φ : application (non linéaire) de $\mathcal{W}$ dans Λ définie par $\varphi_{\alpha\beta}(u) = \frac{\mu}{2} u^{\circ}_{|\alpha} u^{\circ}_{|\beta}$. On vérifie que φ est bien à valeurs dans Λ , car $u \in \mathcal{W}$ entraine $u^{\circ} \in H^2(\Omega)$, donc $u^{\circ}_{|\alpha} \in H^1(\Omega)$ donc aussi à $L^4(\Omega)$ d'après le théorème 1.3.

ε : application de $\mathcal{W}$ dans Λ définie par : $\varepsilon = \sigma + \varphi + \lambda$

χ : élément de $\mathcal{L}(\mathcal{W}; \Lambda)$ défini par $\chi_{\alpha\beta}(u) = u^{\circ}_{|\alpha\beta}$

N et M : éléments de $\mathcal{L}(\Lambda, \Lambda)$ de la forme suivante :

$$N : N^{\alpha\beta}(y) = B^{\alpha\beta\lambda\mu} y_{\lambda\mu} \quad \text{avec } B^{\alpha\beta\lambda\mu} \in L^{\infty}(\Omega)$$

$$M : M^{\alpha\beta}(y) = D^{\alpha\beta\lambda\mu} y_{\lambda\mu} \quad \text{avec } D^{\alpha\beta\lambda\mu} \in L^{\infty}(\Omega)$$

On suppose : $B^{\alpha\beta\lambda\mu} = B^{\lambda\mu\alpha\beta} \quad \forall\, \alpha, \beta, \lambda, \mu$ (de même pour D)

et on pose :

- $$\mathcal{N}(y, z) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} y_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta}(z)\sqrt{a}\,dx = \frac{1}{2}\int_{\Omega} z_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta}(y)\sqrt{a}\,dx$$

- $$\mathcal{M}(y, z) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} y_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta}(z)\sqrt{a}\,dx = \frac{1}{2}\int_{\Omega} z_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta}(y)\sqrt{a}\,dx$$

a étant borné sur $\overline{\Omega}$, il existe K_1 et K_2 tels que

$$(2.2) \quad \begin{cases} |\mathcal{N}(y, z)| \leq K_1 \|y\|_{\Lambda} \|z\|_{\Lambda} \\ |\mathcal{M}(y, z)| \leq K_2 \|y\|_{\Lambda} \|z\|_{\Lambda} \end{cases} \quad \forall\, y \text{ et } z \in \Lambda$$

Nous ferons en outre l'hypothèse qu'il existe k_1 et k_2 stricte-

ment positifs tels que l'on ait :

$$(2.3) \qquad \mathcal{N}(y, y) \geq k_1 \|y\|^2_\Lambda \quad \text{et} \quad \mathcal{M}(y, y) \geq k_2 \|y\|^2_\Lambda \quad \forall y \in \Lambda$$

- $E_\varepsilon(u) = \mathcal{N}\big(\varepsilon(u), \varepsilon(u)\big)$ et $E_f(u) = \mathcal{M}\big(\chi(u), \chi(u)\big)$

c) <u>Grandeurs physiques ainsi schématisées</u>

Sur la coque $\tilde{\Sigma}$, définie par $\overrightarrow{O\pi} = L\vec{f}(P)$, repérée par les coordonnées locales $\tilde{x}_i = L x_i$, subissant le déplacement caractérisé comme il a été dit par u, on a :

$\overrightarrow{\tilde{a}}_\alpha = \overrightarrow{a}_\alpha$ est base locale, $(\Rightarrow \tilde{a}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta})$

$\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{\mu}\varepsilon_{\alpha\beta}(u)$ est le tenseur des extensions de la surface moyenne

$\tilde{\chi}_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{L}\chi_{\alpha\beta}(u)$ est le tenseur des changements de courbure ([12])

Les coefficients $B^{\alpha\beta\lambda\mu}$ et $D^{\alpha\beta\lambda\mu}$ sont choisis de façon à ce que les $N^{\alpha\beta}(\varepsilon)$ et $M^{\alpha\beta}(\chi)$ soient respectivement proportionnels aux tenseurs contravariants des efforts tangents et des moments fléchissants. $E_e(u)$ et $E_f(u)$ sont alors proportionnels à l'énergie d'extension du morceau de coque envisagé et à son énergie de flexion.

Les conditions de régularité imposées aux coefficients B et D sont largement vérifiées par les coques convenables. En particulier, la condition (2.3) exprime que les rigidités à l'extension et à la flexion de la coque ne deviennent pas évanescentes en certaines plages de la coque.

d) Cas particulier

Dans ce paragraphe on explicite à titre d'exemple les différentes fonctions introduites, dans le cas d'une coque constituée d'un matériau vérifiant la loi de Hooke, les constantes élastiques en un point de ce matériau étant constantes le long des normales à la surface moyenne mais pouvant, ainsi que l'épaisseur de la coque, varier avec la projection π du point sur la surface moyenne.

Soient $\overset{n}{E}(x)$ et $\nu(x)$ le module d' YOUNG et le coefficient de Poisson le long de la normale au point x, et $\overset{n}{h}(x)$ l'épaisseur de la coque. On pose : $\overset{n}{E}(x) = E_0 E(x)$, $\overset{n}{h}(x) = \frac{L}{\mu} h(x)$
où $E(x)$ et $h(x)$ sont à valeur dans R et où E_0 et μ sont des constantes choisies telles que $E(x)$ et $h(x)$ soient de l'ordre de 1.

Pour des coques homogènes d'épaisseur constante on prendra évidemment $E(x) \equiv 1$ et $h(x) \equiv 1$, c'est à dire $E_0 = \overset{n}{E}$ et $\mu = L/\overset{n}{h}$

Les coefficients B et D sont alors choisis de la façon suivante :

$$B^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{h E}{1+\nu}\left[a^{\alpha\lambda}\, a^{\beta\mu} + \frac{\nu}{1-\nu}\, a^{\alpha\beta}\, a^{\lambda\mu}\right]$$

$$D^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{h^3 E}{12\,(1+\nu)}\left[\qquad\qquad\qquad\qquad\right]$$

Il s'en suit que l'on a les significations physiques suivantes [15]

$\overset{n}{N}{}^{\alpha\beta}(u) = \frac{E_0 L}{\mu^2}\, N^{\alpha\beta}\big(\varepsilon(u)\big)$ est le tenseur des efforts d'extension

$\overset{n}{M}{}^{\alpha\beta}(u) = \frac{E_0 L^2}{\mu^3}\, M^{\alpha\beta}\big(\chi(u)\big)$ est le tenseur des moments fléchissants

$\overset{n}{E}_e(u) = \frac{E_0 L^3}{\mu^3}\, E_e(u)$ est l'énergie totale d'extension du morceau de coque envisagé, tandis que $\overset{n}{E}_f(u) = \frac{E_0 L^3}{\mu^3} \cdot E_f(u)$ est son énergie de flexion.

Enfin, sous les conditions nullement restrictives dans la pratique :

(2.4) h, E et $\nu \in L^{\infty}(\Omega)$, $|\nu(x)| \leq \bar{\nu} < 1$, h et E bornés inférieurement sur Ω par $\bar{h} > 0$ et $\bar{E} > 0$

on constate que les conditions imposées aux coefficients B et D sont remplies. En particulier :

$$\eta(y, y) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} B^{\alpha\beta\lambda\mu} y_{\alpha\beta} y_{\lambda\mu} \sqrt{a} \, dx^1 dx^2$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{hE}{1+\nu} a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} y_{\alpha\beta} y_{\lambda\mu} \sqrt{a} \, dx^1 dx^2 + \int_{\Omega} \frac{hE\nu}{1-\nu^2} \left(a^{\alpha\beta} y_{\alpha\beta}\right)^2 \sqrt{a} \, dx^1 dx^2$$

La seconde intégrale est positive puisque $\frac{hE\nu}{1-\nu^2}$ l'est par hypothèse en tout point x. $\eta(y, y)$ est donc borné inférieurement par la seconde qui n'est autre que

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{hE}{1+\nu} a_{\alpha\lambda} a_{\beta\mu} y^{\alpha\beta} y^{\lambda\mu} \sqrt{a} \, dx^1 dx^2$$

Utilisant la relation (2.1) et les hypothèses (2.4) on en déduit (2.3) avec $k = \frac{1}{4} m \bar{h} \bar{E} \sqrt{\bar{a}}$.

Dans toute la suite on se placera dans le cas particulier étudié ici. L'adaptation à d'autres types de coques, et en particulier aux coques sandwich serait immédiate.

3 - Dérivées de Fréchet de ces fonctions

Toutes les fonctions introduites sont des formes n-adiques, homogènes ou polynomiales. Elles admettent donc des développements de Taylor finis en tout point. En particulier, elles admettent en tout point des dérivées de Fréchet nulles à partir d'un certain rang.

Etant donné une application $F : E_1 \to E_2$ (E_1 et E_2, espaces normés), on note $d^n F(u\,;\,f)$ la valeur au point f de la $n^{\text{ème}}$ différentielle de Fréchet de F au point u. On vérifie que :

a) Le développement de Taylor de $\varepsilon(u)$ est :

$$\varepsilon(u+f) = \varepsilon(u) + d^1\varepsilon(u\,;\,f) + \frac{1}{2}\, d^2\varepsilon(u\,;\,f) \quad , \text{ avec}$$

$$\begin{cases} d^1\varepsilon(u\,;\,f) = \sigma(f) + \lambda(f) + \frac{\mu}{2}\left(u^\circ|_\alpha\, f^\circ|_\beta + u^\circ|_\beta\, f^\circ|_\alpha\right) \\ d^2\varepsilon(u\,;\,f) = 2\,\varphi(f) \qquad ; \qquad d^n\varepsilon(u\,;\,f) = 0 \quad (n > 2) \end{cases}$$

b) Le développement de Taylor de $E_e(u)$ est :

$$E_e(u+f) = \mathcal{N}\left[\varepsilon(u) + d^1\varepsilon(u\,;f) + \frac{1}{2}\, d^2\varepsilon(u;f) \;,\; \varepsilon + d^1\varepsilon + \frac{1}{2}\, d^2\varepsilon\right] =$$

$$= \mathcal{N}\left[\varepsilon(u)\,,\,\varepsilon(u)\right] + 2\,\mathcal{N}\left[\varepsilon\,,\,d^1\varepsilon\right] + \mathcal{N}\left[d^1\varepsilon\,,\,d^1\varepsilon\right] + 2\,\mathcal{N}\left[\varepsilon\,,\,d^2\varepsilon\right] +$$

$$+ 2\,\mathcal{N}\left[d^1\varepsilon\,,\,\varphi(f)\right] + \mathcal{N}\left[\varphi(f)\,,\,\varphi(f)\right]$$

Ce qui entraine en particulier, en tenant compte de la symétrie de $N^{\alpha\beta}$, et en posant $N^{\alpha\beta}\left[\varepsilon(u)\right] = N^{\alpha\beta}(u)$:

$$(2.5)\begin{cases} d^1 E_e(u\,;\,f) = 2\,\mathcal{N}\left[\varepsilon(u)\;,\;d^1\varepsilon(u\,;\,f)\right] = \\ \quad = \displaystyle\int_\Omega \left[-\mu\, f^\circ N^{\alpha\beta}(u)\, b_{\alpha\beta} + N^{\alpha\beta}(u)\, f_{\alpha|\beta} + \mu\, N^{\alpha\beta}(u)\, u^\circ|_\alpha\, f^\circ|_\beta\right]\sqrt{a}\; dx^1 dx^2 \end{cases}$$

c) Le développement de Taylor de $E_f(u)$ est :

$$E_f(u+f) = E_f(u) + 2\,\mathcal{M}\left[\chi(u)\,,\,\chi(f)\right] + E_f(f)$$

ce qui entraine, en désignant par $M^{\alpha\beta}(u)$ la quantité $M^{\alpha\beta}\left[\chi(u)\right]$:

$$(2.6)\begin{cases} d^1 E_f(u\,;f) = 2\,\mathcal{M}\left[\chi(u)\,,\,\chi(f)\right] = \displaystyle\int_\Omega M^{\alpha\beta}(u)\, f^\circ|_{\alpha\beta}\,\sqrt{a}\; dx^1\, dx^2 \\ d^2 E_f(u\,;f) = 2\; E_f(f) \qquad ; \qquad d^n E_f(u\,;f) = 0 \quad (n > 2) \end{cases}$$

4 - Equations d'Equilibre

On considère un système matériel constitué d'un élément de coque Σ du type étudié précédemment, et éventuellement d'autres éléments matériels. Une déformation de Σ est caractérisée par un élément u de l'espace $\mathcal{W}$, et nous supposons que, compte tenu des liaisons, la position des éléments matériels autres que la coque elle-même est connue dès qu'est connu le déplacement u de Σ, l'ensemble des déplacements u géométriquement permis par les liaisons étant un sous espace vectoriel W fermé de $\mathcal{W}$, contenant $W_0 = \left[H_0^1 (\Omega) \right]^2 \times H_0^2 (\Omega)$.

On suppose en outre que, pour les déplacements admissibles $u \in W$, les éléments matériels autres que la coque possèdent une énergie de déformation, et que l'ensemble des forces extérieures appliquées au système complet possède une énergie potentielle, la somme de ces deux énergies étant égale à $\hat{E}_A (u) + \hat{E}_p (u)$, avec :

$$\hat{E}_A (u) = \frac{E_0 L^3}{\mu^3} E_A (u) \quad ; \quad E_A (u) = E_{A_0} (u_0) + E_A^0 (u^0)$$

où $E_{A_0} (u_0)$ et $E_A^0 (u^0)$ sont les formes quadratiques associées à deux formes $E_{A_0} (u_0 , v_0)$ et $E_A^0 (u^0 , v^0)$, bilinéaires, symétriques, continues sur les espaces décrits dans $\mathcal{V}$ et $H^2 (\Omega)$ lorsque u décrit W.

$$\hat{E}_p (u) = \frac{E_0 L^3}{\mu^3} E_p (u) \quad ,$$ où $E_p (u)$ est une forme linéaire continue sur W.

On pose : $E_{A_0} (u_0 , v_0) + E_A^0 (u^0 , v^0) = E_A (u , v)$

L'énergie totale du système dans le déplacement $u \in W$ est donc, au facteur multiplicatif près $\frac{E_0 L^3}{\mu^3}$:

$$E (u) = E_e (u) + E_f (u) + E_A (u) + E_p (u)$$

Les positions d'équilibre du système sont donc caractérisées par les points stationnaires de $E(u)$ dans W. Ce sont donc les solutions du

Problème 1 : | Trouver $u \in W$ tel que

$$d^1 E(u\,;f) = 0 \quad \forall f \in W$$

Une telle position d'équilibre est stable si $E(u)$ y est minimum, c'est à dire si elle est solution du

Problème 2 : | Trouver $u \in W$ tel qu'il existe un voisinnage $\mathcal{V}(u)$ de u dans $\mathcal{W}$ tel que

$$E(v) - E(u) > 0 \quad \forall v \in W \cap \mathcal{V}(u) \quad , \quad v \neq u$$

Toute solution du second problème est solution du premier. Il en va de même pour les solutions du

Problème 3 : | Trouver $u \in W$ tel qu'il existe un voisinnage $\mathcal{V}(u)$ de u dans $\mathcal{W}$ tel que

$$E(v) - E(u) \geq 0 \quad \forall v \in W \cap \mathcal{V}(u)$$

5 - Commentaires et exemples

a) Espaces W - W est défini par les conditions aux limites géométriques. Les plus classiques sont :

1- Σ est encastrée le long de la partie Γ^* de la frontière Γ, ce qui se traduit par : $u_{|\Gamma^*} = 0 \quad , \quad \frac{du^\circ}{dn}_{|\Gamma^*} = 0 \quad \forall u \in W$

W apparait alors comme le noyau de l'application : $u \to \left(u_{|\Gamma^*} , \frac{du^\circ}{dn}_{|\Gamma^*}\right)$ qui est définie et continue sur $\mathcal{W}$ (Théorème 1.2) . Par suite W est fermé. Cette application est de plus du type frontière, c'est à dire nulle sur W_0 : on a donc bien $W_0 \subset W$.

2- Σ est simplement supportée le long d'une partie Γ^* de Γ :

$$W = \left\{ u \mid u \in \mathcal{W} \quad , \quad u_{|\Gamma^*} = 0 \right\}$$

3- Certains cas d'encastrement sur des solides mobiles conduiront à des espaces W du type : (C.F l'exemple du paragraphe 6)

$$W = \left\{ u \mid u_{|\Gamma^*} \in E \right\} \quad \text{avec } E \text{ sous espace fermé de } L^2(\Gamma^*)$$

D'une façon générale, W sera défini comme étant l'antécédent d'un fermé dans une application linéaire : $u \to \mathcal{G}(u)$ définie sur $\mathcal{W}$, continue pour assurer la fermeture de W, et de type frontière pour assurer $W_0 \subset W$

$\mathcal{G}$ sera dans la pratique construit à l'aide d'opérateurs trace : sur une courbe Γ^* et à valeurs dans $H^1(\Gamma^*)$, ou en un point et à valeur dans R pour u^o, sur une courbe Γ^* et à valeurs dans $L^2(\Gamma^*)$ pour $\frac{du^o}{dn}$ et u_α (Théorèmes 1.2 et 1.4)

b) <u>Energie de déformation $E_A(u)$</u> - Ce terme quadratique s'introduira pour des coques supportées élastiquement. Il sera ou non de type frontière (nul sur W_0) :

Ex 1- encatrement élastique le long de $\Gamma^* \subset \Gamma$:

$$u_{|\Gamma^*} = 0 \qquad \text{et} \qquad E_A(u) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma^*} k(x) \left(\frac{du^o}{dn} \right)^2 d\sigma^*$$

Ex 2- plaque sur semelle élastique : $E_A(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega k(x)(u^o)^2 \sqrt{a}\, dx$

c) <u>Energie potentielle $E_p(u)$</u> - Les forces extérieures appliquées dans la pratique seront, après division par le facteur $\frac{E_0 L^3}{\mu^3}$:

1- Des forces de surface définies par le vecteur champ (par unité de sur-

face sur Ω pour simplifier) :

$$\bar{F}^{\alpha}\,\vec{a}_{\alpha} + \bar{F}^{o}\,\vec{a}^{o} \quad , \quad \bar{F}^{\alpha} \text{ et } \bar{F}^{o} \in L^2(\Omega)$$

d'énergie potentielle : $-\int_{\Omega} \bar{F}^{\alpha}\, u_{\alpha}\, dx - \int_{\Omega} \bar{F}^{o}\, u^{o}\, dx$

2- Des forces de bord définies sur une partie Γ^* de Γ par le vecteur champ par unité de longueur :

$$\bar{\bar{F}}^{\alpha}\,\vec{a}_{\alpha} + \bar{\bar{F}}^{o}\,\vec{a}^{o} \quad , \quad \bar{\bar{F}}^{\alpha} \text{ et } \bar{\bar{F}}^{o} \in L^2(\Gamma^*)$$

d'énergie potentielle : $-\int_{\Gamma^*} \bar{\bar{F}}^{\alpha}\, u_{\alpha}\, d\sigma - \int_{\Gamma^*} \bar{\bar{F}}^{o}\, u_{o}\, d\sigma$

3- Des moments fléchissants appliqués également au bord, définis par le vecteur champ par unité de longueur $\bar{\bar{M}}\,\vec{t}$, ($M \in L^2(\Gamma^*)$, $\vec{t}$ vecteur unité tangent à Γ^*) d'énergie potentielle $-\int_{\Gamma^*} \bar{\bar{M}}\,\frac{du^{o}}{dn}\, d\sigma$

4- D'autres forces appliquées aux éléments autres que la coque et dont l'expression prend une des formes ci-dessus (C.F exemple paragraphe 6)

On vérifie que chacune de ces énergies potentielles est une forme linéaire continue sur W , donc aussi leur somme.

On pose :

$$E_p(u) = \langle g, u \rangle_W = \langle g_o, u_o \rangle_{\gamma^o} + \langle g^o, u^o \rangle_{H^2(\Omega)} = \bar{E}_p(u) + \bar{\bar{E}}_p(u)$$

avec :

$$\langle g_o, u_o \rangle_{\gamma^o} = -\left[\int_{\Omega} \bar{F}^{\alpha}\, u_{\alpha}\, dx + \int_{\Gamma^*} \bar{\bar{F}}^{\alpha}\, u_{\alpha}\, d\sigma\right]$$

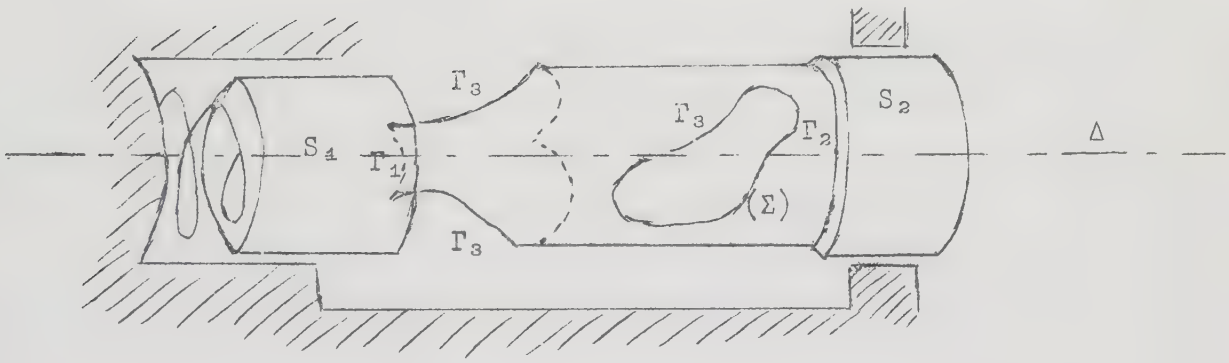
$$\langle g^o, u^o \rangle_{H^2(\Omega)} = -\left[\int_{\Omega} \bar{F}^{o}\, u^{o}\, dx + \int_{\Gamma^*} \bar{\bar{F}}^{o}\, u^{o}\, d\sigma + \int_{\Gamma^*} \bar{\bar{M}}^{o}\,\frac{du^{o}}{dn}\, d\sigma\right]$$

$$\bar{E}_p(u) = -\left[\int_{\Omega} \bar{F}^{\alpha}\, u_{\alpha}\, dx + \int_{\Omega} \bar{F}^{o}\, u_{o}\, dx\right]$$

$$\bar{\bar{E}}_p(u) = -\left[\int_{\Gamma^*} \bar{\bar{F}}^{\alpha}\, u_{\alpha}\, d\sigma + \int_{\Gamma^*} \bar{\bar{F}}^{o}\, u^{o}\, d\sigma + \int_{\Gamma^*} \bar{\bar{M}}\,\frac{du^{o}}{dn}\, d\sigma\right]$$

On remarque que $\overline{E}_p(u)$ est une forme linéaire continue sur $\left[L^2(\Omega)\right]^3$, c'est à dire de la forme $< \overline{F}, u >_{\left[L^2(\Omega)\right]^3}$, et que $\overline{\overline{E}}_p(u)$ est de type frontière (nulle sur W_0)

6 - EXEMPLE : Machine à tester de type poids mort



On prend pour coque Σ un manchon de cylindre droit. Une des extrémités, non nécessairement plane, est en partie encastrée dans un solide S_1 le long d'une courbe Γ_1. L'autre extrémité, section droite Γ_2, est simplement appuyée sur une face plane d'un solide S_2. Δ_1 et Δ_2 désignent les traces dans S_1 et S_2 de l'axe Δ de Σ avant toute déformation.

Les liaisons mécaniques, sans frottement, sont telles que par rapport à un bâti fixe, S_1 ne peut que se translater parallèlement à Δ_1, sans tourner, comprimant ainsi un ressort de raideur $\vec{K}$, et S_2 peut se translater parallèlement à Δ_2 et tourner autour de Δ_2.

Les forces appliquées au système sont des forces appliquées à S_2 de torseur $\mathcal{T}$, et des forces appliquées à Σ et schématisées par un champ $\vec{F}$ sur Σ dont les composantes dans la base locale sont dans $L^2(\Omega)$, associé à la mesure aire sur Σ.

En prenant pour L le rayon du cylindre, on a :

$$a_{\alpha\alpha} = 1 \quad , \quad a_{\alpha\beta} = 0 \text{ si } \alpha \neq \beta \quad , \quad b_{11} = b_{12} = b_{21} = 0 \quad , \quad b_{22} = 1$$

La base locale est donc orthonormée : les composantes contra et covariantes sont identiques ; nous mettrons tous les indices en haut.

Les conditions aux limites géométriques imposent pour W :

$$W = \left\{ u \;\middle|\; \begin{array}{l} u \in \mathcal{W};\ u^0_{|\Gamma_1} = 0 \ ;\ \frac{du^0}{dn}_{|\Gamma_1} = 0 \ ;\ u^2_{|\Gamma_1} = 0 \ ;\ \frac{d}{d\sigma_1}\left(u^1_{|\Gamma_1}\right) = 0 \\ u^0_{|\Gamma_2} = 0 \ ;\ \frac{d}{dx^2}\left(u^1_{|\Gamma_2}\right) = 0 \quad \frac{d}{dx^2}\left(u^2_{|\Gamma_2}\right) = 0 \end{array} \right\}$$

où σ_1 est l'abscisse curviligne sur Γ_1 et où $\frac{d}{d\sigma_1}\left[u^1_{|\Gamma_1}\right]$ désigne la dérivée distribution de $u^1_{|\Gamma_1} \in L^2(\Gamma_1) \subset \mathcal{D}'(\Gamma_1)$. (Définition analogue pour $\frac{d}{dx^2}\left(u^\alpha_{|\Gamma_2}\right)$).

L'énergie de déformation du ressort comprimé par S_1 est donnée par : $E_A(u) = \frac{K}{2}\left(u^1_{|\Gamma_1}\right)^2$, avec $K = \frac{\mu}{E_0 L}\tilde{K}$,

où $u^1_{|\Gamma_1}$ désigne la valeur constante prise par u^1 sur Γ_1.

L'énergie potentielle des forces appliquées est donnée par :

$$E_p(u) = -\int_\Omega \sum_{i=0}^{2} F^i\, u^i\, dx^1\, dx^2 + F\, u^1_{|\Gamma_2} - M\, u^2_{|\Gamma_2}$$

avec
$$\left\{ \begin{array}{ll} F^\alpha = \frac{\mu^2}{E_0}\vec{F}\cdot\vec{a}_\alpha \ , & F^0 = \frac{\mu^3}{E_0}\vec{F}\cdot\vec{a}_0 \\ F = -\frac{\mu^2}{E_0 L^2}\vec{\mathcal{R}}(\tau)\cdot\vec{a}_1 \ , & M = \frac{\mu^2}{E_0 L^3}\overrightarrow{\mathcal{M}}(0,\tau)\cdot\vec{a}_1 \end{array} \right.$$

Les différentielles de Fréchet de ces fonctionnelles sont respectivement :

$$d^1 E_A(u\,;f) = K\, u^1_{|\Gamma_1} f^1_{|\Gamma_1} \qquad \text{et} \qquad d^1 E_p(u\,;f) = E_p(f)$$

Compte tenu de (2.5) , (2.6) et des valeurs particulières des tenseurs a et b , le problème 1 pour le système envisagé consiste à trouver $u \in W$ tel que :

$$(2.7)\quad \int_\Omega \left\{ -\mu N^{22}(u) f^\circ + \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \left[N^{\alpha\beta}(u) \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\mu}{2} N^{\alpha\beta} \frac{\partial u^\circ}{\partial x^\alpha} \frac{\partial f^\circ}{\partial x^\beta} + M^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 f^\circ}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right] \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{2} F^i f^i \right\} dx^1\, dx^2 + K\, u^1_{|\Gamma_1} f^1_{|\Gamma_1} + F\, f^1_{|\Gamma_2} - M\, f^2_{|\Gamma_2} = 0 \quad \forall f \in W$$

Dans cet exemple, les applications N et M sont les applications classiques :

$$N^{11}(u) = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\varepsilon^{11}(u) + \nu\, \varepsilon^{22}(u)\right] \qquad M^{11}(u) = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left[\chi^{11}(u) + \nu\, \chi^{22}(u)\right]$$

$$N^{22}(u) = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\nu\, \varepsilon^{11}(u) + \varepsilon^{22}(u)\right] \qquad M^{22}(u) = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left[\chi^{22}(u) + \nu\, \chi^{11}(u)\right]$$

$$N^{12}(u) = N^{21}(u) = \frac{Eh}{1+\nu}\, \varepsilon^{12}(u) \qquad M^{12}(u) = M^{21}(u) = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\, \chi^{12}(u)$$

7 - Interprétation du problème 1

Nous ferons explicitement cette interprétation dans le cas de l'exemple précédent.

Prenant d'abord dans (2.7) f dans W_0, on voit que toute solution u du problème 1 est solution au sens des distributions du système d'équations non linéaires (d'équilibre interne) :

$$(2.8)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial N^{\alpha\beta}(u)}{\partial x^\alpha} + F^\beta = 0 \\[2ex] \displaystyle\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \left[\frac{\partial^2 M^{\alpha\beta}(u)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(N^{\alpha\beta}(u) \frac{\partial u^\circ}{\partial x^\beta} \right) \right] - \mu N^{22}(u) = F^\circ \end{cases}$$

Dans le cas général, ces équations s'écrivent : $A(u) = \overline{F}$, où $\overline{F} = (\overline{F}_0, \overline{F}^\circ)$ est l'élément de $\left(L^2(\Omega)\right)^3$ défini au paragraphe 5 et où

$A(u)$ est l'opérateur différentiel non linéaire défini par :

$$d^1 E(u\,;\,\varphi) = \langle A(u)\,,\,\varphi\rangle \qquad \forall\,\varphi \in \left[\mathcal{D}(\Omega)\right]^3$$

expression dans laquelle le crochet désigne la dualité entre $\left[\mathcal{D}(\Omega)\right]^3$ et $\left[\mathcal{D}'(\Omega)\right]^3$

Prenant ensuite f quelconque dans W, appliquant <u>formellement</u> les formules d'intégration par parties et tenant compte de (2.8), on obtient les conditions aux limites statiques (2.9), vérifiées par toute solution suffisamment régulière :

sur Γ_1 : $K\,u^1_{|\Gamma_1} + \int_{\Gamma_1} N^{1\beta}(u)\; n^\beta\, d\sigma_1 = 0$

sur Γ_2 : $\int_{\Gamma_2} N^{11}\, dx^2 + F = 0$; $\int_{\Gamma_2} N^{21}\, dx^2 - M = 0$; $M^{11} = 0$

sur Γ_3 : $N^{\alpha\beta}\, n^\beta = 0$; $M^{\alpha\beta}\, n^\alpha\, n^\beta = 0$

$$N^{\alpha\beta}\,\frac{\partial u^\circ}{\partial x^\alpha}\, n^\beta - \frac{\partial M^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha}\, n^\beta - \frac{\partial}{\partial \sigma_3}\left(M^{\alpha\beta}\, n^\beta\, t^\alpha\right) = 0$$

où $n^\alpha \vec{a}_\alpha$ est la normale extérieure à Ω en un point de Γ, $t^\alpha \vec{a}_\alpha$ est le vecteur unité tangent à Γ et σ_i est l'abscisse curviligne sur Γ_i.

C H A P I T R E III

EQUATIONS LINEAIRES

Sommaire :

On se place dans le cadre classique des équations linéaires, déduites des équations précédentes par suppression des termes non linéaires.

Le problème de l'existence et de l'unicité de la solution est alors résolu par application du théorème de Lax-Milgram, sous la condition que la fonctionnelle (quadratique ici) de l'énergie soit coercive.

L'objet de ce chapitre est essentiellement l'étude de cette coercivité.

Les résultats essentiels sont :

- La proposition 3-2 dans le cas de coques "presque" cylindriques
- Les propositions 3-4 et 3-5, ainsi que la remarque 2 page III-11, dans le cas général.

Les outils de base utilisés dans cette étude sont les normes équivalentes mises en évidence au chapitre I , et des minorations convenables de la fonctionnelle de l'énergie.

L'exemple type du chapitre II est traité pages III-6 et 7.

La non linéarité des équations considérées est d'ordre géométrique. Elle est introduite par la présence de φ dans ε.

On obtient les équations linéaires classiques de la théorie des coques en remplaçant dans ces équations ε par $\varepsilon_L = \sigma + \lambda$.

L'énergie totale dans le déplacement u est alors de la forme

$$E(u) = a(u, u) + E_p(u)$$

où $E_p(u)$ est linéaire continue sur W, et où

$$a(v, w) = \mathcal{N}\left[\sigma(v) + \lambda(v), \sigma(w) + \lambda(w)\right] + \mathcal{M}\left[\chi(v), \chi(w)\right] + E_A(v, w)$$

est bilinéaire continue sur W, et symétrique.

On déduit alors (Cf : [16]) la

Proposition 3.1

Si il existe $\alpha > 0$ tel que

$$a(u,u) = \mathcal{N}\left(\sigma(u) + \lambda(u)\right) + E_f(u) + E_A(u) \geq \alpha \|u\|_W^2 \quad \forall u \in W \qquad (3.1)$$

alors les problèmes 1-2-3 en théorie linéaire sont identiques et possèdent une et une seule solution.

Le traitement du problème linéaire est classique. En particulier, la proposition précédente peut-être prolongée par des théorèmes d'existence et d'unicité pour des problèmes avec conditions aux limites non homogènes, et, moyennant des conditions de régularité supplémentaires pour les données, par des théorèmes de régularité supplémentaires pour la solution.

Le problème qui nous intéresse plus particulièrement ici est de re-

chercher des conditions suffisantes pour que l'hypothèse de coercitivité de $a(u, v)$ intervenant dans la proposition 4.1 soit réalisée.

Ce problème est lié à celui de la recherche de normes équivalentes dans W. Le travail a été préparé par les théorèmes 1.5 et 1.8 -

1. - Dans ce paragraphe, nous utilisons directement les résultats des théorèmes 1.5 et 1.8 .

Soient B_0 (resp.^{t} : B°) un espace de Hilbert, et $L_0 \in \mathcal{L}(V ; B_0)$ $\left[\text{resp.}^t : L^\circ \in \mathcal{L}(H^2(\Omega) ; B^\circ)\right]$ vérifiant les conditions des théorèmes 1.5 et 1.8 . Il résulte de ces théorèmes qu'il existe k_0 et k° strictement positifs tels que :

$$(3.2) \qquad \|u_0\|_0^2 \leq k_0 \left[\| L_0 u_0 \|_{B_0}^2 + \| s(u_0) \|_\Lambda^2\right] \qquad \forall u = (u_0, u^\circ) \in W$$

$$(3.3) \qquad \|u^\circ\|_0^2 \leq k^\circ \left[\| L^\circ u^\circ \|_{B^\circ}^2 + \|u^\circ\|_2^2\right]$$

On pose $B = B_0 \times B^\circ$ et $L = (L_0, L^\circ)$

Proposition 3.2

Si il existe $\bar{\alpha}$ strictement positif tel que :

$$(3.4) \qquad E_A(u) \geq \bar{\alpha} \| Lu \|_B^2 \qquad \forall u \in W$$

alors la condition (3.1) est réalisée dans le cas où les $a_{\alpha\beta}$ sont des constantes (en particulier : pour les coques cylindriques) et aussi, si les $a_{\alpha\beta}$ ne sont pas constants, si les coefficients k_0 et k° sont suffisamment petits, ou si les coefficients de Chistoffel de la coque sont suffisamment petits.

Démonstration.

Sous les hypothèses (3-4) et (2-3) , il vient :

$$\begin{cases} a(u,u) \geq \beta_1 k_1 \|\sigma(u) + \lambda(u)\|^2_\Lambda + \beta_2 k_2 \|u^\circ_{|\alpha\beta}\|^2_\Lambda + \beta_3 \bar{\alpha} \|L^\circ u^\circ\|^2_{B^\circ} + \\ \qquad\qquad + \beta_4 \bar{\alpha} \|L_0 u_0\|^2_{B_0} \\ \forall \quad \beta_1 \dots \beta_4 \in]0,1[\qquad \text{et} \qquad \forall \ u \in W \end{cases}$$

où les constantes positives k_i sont celles figurant dans (2.3)

Utilisant : $(a+b)^2 \geq (1-\beta)\, a^2 - \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) b^2 \qquad \forall \ \beta \in]0,1[$, il vient :

(3.5) $a(u,u) \geq A(u_0) + B(u^\circ) \qquad \forall \ \beta_i \in]0,1[\ , \ \forall \ u \in W$, avec

(3.6) $A(u_0) = \beta_1 k_1 (1-\beta_5) \|\sigma(u_0)\|^2_\Lambda + \beta_4 \bar{\alpha} \|L_0 u_0\|^2_{B_0}$

(3.7) $B(u^\circ) = \beta_2 k_2 \|u^\circ_{|\alpha\beta}\|^2_\Lambda - \beta_1 k_1 \left(\frac{1}{\beta_5} - 1\right) \|\lambda(u^\circ)\|^2_\Lambda + \beta_3 \bar{\alpha} \|L^\circ u^\circ\|^2_{B^\circ}$.

Il suffit donc de montrer que sous les conditions indiquées, on peut choisir les $\beta_i \in]0,1[$ de telle façon qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

(3.1)' $A(u_0) \geq \alpha \|u_0\|^2_{\mathcal{V}} = \alpha \left[\|u_0\|^2_0 + \|s(u_0)\|^2_\Lambda\right]$

$\forall \ u = (u_0, u^\circ) \in W$

(3.1)" $B(u^\circ) \geq \alpha \|u^\circ\|^2_{H^2} = \alpha \left[\|u^\circ\|^2_0 + \|u^\circ\|^2_2\right]$

<u>Etude de (3.1)' -</u>

On a : $\sigma_{\alpha\beta}(u_0) = s_{\alpha\beta}(u_0) - \sum_{\gamma=1}^{2} A^\gamma_{\alpha\beta} u_\gamma$, ce qui entraîne :

$$\|\sigma(u_0)\|^2_\Lambda \geq (1-\beta_7) \|s(u_0)\|^2_\Lambda - \left(\frac{1}{\beta_7} - 1\right) \left\| \sum_{\gamma=1}^{2} A^\gamma_{\alpha\beta} u_\gamma \right\|^2_\Lambda$$

(3.8) $$\geq (1-\beta_7) \|s(u_0)\|^2_\Lambda - \left(\frac{1}{\beta_7} - 1\right) K \|u_0\|^2_0 \quad \forall \ u_0 \in \mathcal{V} \ \text{et} \ \beta_7 \in]0,1[$$

où K est un coefficient ne dépendant que du tenseur métrique et lié à la borne supérieure de $|A^\gamma_{\alpha\beta}|$ (8) . En particulier, K est nul si les $A^\gamma_{\alpha\beta}$ sont nuls, c'est à dire si le tenseur $a_{\alpha\beta}$ est constant.

(8) - Par exemple : $K = 2 \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \sup_{x \in \Omega, \ \gamma=1,2} \left[A^\gamma_{\alpha\beta}(x)\right]^2$

Tenant compte de (3.2) et (3.8) dans (3.6), il vient :

$$A(u_0) \geq \| s(u_0) \|^2_\Lambda \left[\beta_1 k_1 (1-\beta_5)(1-\beta_7) - \beta_4 \bar{\alpha} \right] +$$

$$+ \|u_0\|^2_0 \left[\frac{\beta_4 \bar{\alpha}}{k_0} - \frac{\beta_1 k_1 (1-\beta_5)(1-\beta_7)}{\beta_7} K \right]$$

Pour que le premier crochet soit strictement positif, il est nécessaire que les $\beta_1 \ldots \beta_7$ soient liés par la relation

(3.9) : $\beta_4 \bar{\alpha} = \beta_1 k_1 (1-\beta_5)(1-\beta_7) \beta_8$ avec $\beta_8 \in \left[0, 1\right[$

Il vient alors :

(3.10) $A(u_0) \geq \beta_1 k_1 (1-\beta_5)(1-\beta_7) \left[\| s(u_0) \|^2_\Lambda (1-\beta_8) + \|u_0\|^2_0 \left(\frac{\beta_8}{k_0} - \frac{K}{\beta_7} \right) \right]$

Si $k_0 K \geq 1$, le coefficient de $\|u_0\|^2_0$ est négatif quels que soient les $\beta_i \in \left]0, 1\right[$, et la condition désirée n'est pas réalisée.

Par contre, si $k_0 K < 1$, on réalise (3.1)' en prenant successivement :

$$\beta_7 = \frac{1}{2} + \frac{k_0 K}{2} \quad , \quad \beta_8 = 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{k_0 K}{\beta_7}\right) = \frac{1}{2} + \frac{k_0 K}{\beta_7} \quad , \quad \beta_5 = \frac{1}{2}$$

et enfin, β_1 et β_4 liés par (3.9).

Etude de (3.1)" -

Supposons (3.1)' réalisé comme indiqué.

On a : $u^\circ_{|\alpha\beta} = \frac{\partial^2 u^\circ}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \sum_{\gamma=1}^{2} A^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial u^\circ}{\partial x^\gamma}$, ce qui entraine :

(3.10)bis $B(u^\circ) \geq \beta_2 k_2 (1-\beta_9) \|u^\circ\|^2_2 - \beta_2 k_2 \left(\frac{1}{\beta_9} - 1\right) K \|u^\circ\|^2_1 - \beta_1 k_2 \|\lambda(u^\circ)\|^2_\Lambda$

$+ \beta_3 \bar{\alpha} \|L^\circ u^\circ\|^2_{B^\circ} \quad \forall u \in W$ et $\forall \beta_i \in \left]0, 1\right[$

Le lemme énoncé ci-dessous a été établi dans [17] (page 122)

<u>Lemme</u> : Soient A , B , C trois espaces de Banach, avec $A \subset B \subset C$, injection de B dans C continue et injection de A dans B compacte. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C(\varepsilon)$ telle que :

$$\|a\|_B^2 \leq \varepsilon \|a\|_A^2 + C(\varepsilon) \|a\|_C^2 \qquad \forall a \in A .$$

Appliquant ce lemme à $A = H^2(\Omega)$, $B = H^1(\Omega)$, $C = L^2(\Omega)$, il vient :

$$(3.11) \qquad \forall \varepsilon > 0 , \exists f(\varepsilon) : \|u^o\|_1^2 \leq \varepsilon \|u^o\|_2^2 + f(\varepsilon) \|u^o\|_o^2 \quad \forall u \in H^2(\Omega)$$

Utilisant (3.11) puis (3.3) dans $(3.10)^{bis}$, il vient :

$$(3.12) \qquad B(u^o) \geq \|u^o\|_2^2 \left[\beta_2 k_2 \left[(1-\beta_9) - K \varepsilon \left(\frac{1}{\beta_9} - 1\right)\right] - \beta_3 \bar{\alpha} \right]$$
$$+ \|u^o\|_o^2 \left[\frac{\beta_3 \bar{\alpha}}{k^o} - f(\varepsilon) K \beta_2 k_2 \left(\frac{1}{\beta_9} - 1\right) - \beta_1 k_1 B \right]$$

avec $\qquad B = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \sup_{x \in \Omega} \left[b_{\alpha\beta}(x) \right]^2$

- Pour rendre chacun des crochets strictement positif, il est nécessaire de choisir β_9 et ε tels que :

$$(3.13) \qquad (1-\beta_9) - \left(\frac{1}{\beta_9} - 1\right) K \varepsilon > K k_o f(\varepsilon) \frac{1-\beta_9}{\beta_9}$$

Supposons en effet que (3.13) ne soit pas réalisée, c'est à dire que l'on ait $(1-\beta_9) - \left(\frac{1}{\beta_9} - 1\right) K \varepsilon = \gamma K k_o f(\varepsilon) \frac{1-\beta_9}{\beta_9}$ avec $\gamma \leq 1$.

Le premier crochet est alors positif si

$$\beta_3 \bar{\alpha} < \beta_2 k_2 \gamma K k^o f(\varepsilon) \left(\frac{1}{\beta_9} - 1\right)$$

ce qui entraine que le second est négatif.

- Supposons donc, lorsque cela est possible, β_9 et ε choisis tels que (3.13) soit réalisée, et soit μ strictement compris entre les deux membres de (3.13) . Choisissons alors β_1 , β_2 , β_3 et β_4 liés par

(3.9) (pour assurer (3.1)') et par :

$$\frac{\beta_3 \bar{\alpha}}{\beta_2 k_2} = \mu \quad (> 0) \quad ; \quad \frac{\beta_1 k_1}{\beta_2 k_2} = \frac{1}{2 k_0} \left[\mu - k_0 K f(\varepsilon) \left(\frac{1}{\beta_9} - 1\right) \right] \quad (> 0)$$

Ce choix est possible, car ces trois relations définissent $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ et β_4 de même signe et à une constante multiplicative près que l'on choisira convenablement pour assurer $\beta_i \in \left]0, 1\right[$.

On vérifie qu'avec ce choix des β_i, les deux crochets de (3.12) sont strictement positifs, ce qui réalise (3.1)".

- Il reste donc à vérifier que sous les hypothèses de la proposition, on peut choisir β_9 et ε tels que (3.13) soit vérifiée.

Or, (3.13) s'écrit encore : $\beta_9 > K \left[\varepsilon + k^\circ f(\varepsilon) \right]$, qui est vérifié pour K nul, c'est à dire si $a_{\alpha\beta}$ est constant, et, si $K \neq 0$, pour K ou k° suffisamment petits. La proposition est établie.

<u>Exemple</u>

Dans les applications, les opérateurs L° et L_0 seront évidemment définis à l'aide des opérateurs trace sur la frontière.

Ainsi dans l'exemple de la machine à tester de type poids mort (II-6) on avait en particulier :

$$u^\circ|_{\Gamma_1} = 0 \quad , \quad \frac{du^\circ}{dn}\Big|_{\Gamma_1} = 0 \quad , \quad u_2|_{\Gamma_1} = 0 \quad , \quad \frac{d}{d\sigma_1}\left(u_1|_{\Gamma_1}\right) = 0 \quad \forall u \in W$$

et : $$F_A(u) = \frac{K}{2} \left(u_1|_{\Gamma_1}\right)^2 = K' \, \| u_1|_{\Gamma_1} \|^2_{L^2(\Gamma_1)}$$

On choisira donc :

$$B_0 = \left(L_2(\Gamma_1) \times L_2(\Gamma_1)\right) \quad , \quad L_0 u_0 = \left(u_1|_{\Gamma_1} \quad , \quad u_2|_{\Gamma_1}\right)$$

$$B^\circ = \left(L_2(\Gamma_1) \times L_2(\Gamma_1)\right) \quad , \quad L^\circ u^\circ = \left(u^\circ|_{\Gamma_1} \quad , \quad \frac{du^\circ}{dn}\Big|_{\Gamma_1}\right)$$

On vérifie que les quantités ci-dessus vérifient les conditions des théorèmes 1.5 et 1.8 (la coque est supposée manchon).

Or, on a, pour tout $u \in W$:

$$\|Lu\|_B^2 = \|u_1|\Gamma_1\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \|u_2|\Gamma_2\|^2_{L^2(\Gamma_2)} + \|u^\circ|\Gamma_1\|^2_{L^2(\Gamma_1^+)} + \left\|\frac{du^\circ}{dn}|\Gamma_1\right\|^2_{L^2(\Gamma_1)} =$$

$$\|u_1|\Gamma_1\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \leqslant \frac{1}{K'} E_A(u)$$

La condition 3.4 est donc réalisée, et le problème posé possède une solution unique en équations linéaires.

Remarque - La proposition 3.2 sera commode, dans le cas de coques cylindriques ou "presque" cylindriques, par exemple dans une théorie tenant compte des défauts de construction d'une coque cylindrique. Dans les autres cas, il conviendrait d'évaluer les constantes k_0 , k° , K , $f(\varepsilon)$.

Il peut alors être préférable d'utiliser une des propositions ci-dessous.

2 - Proposition 3.3

Si il existe $\bar{\alpha} > 0$ tel que

$$E_A(u) \geqslant \bar{\alpha} \|Lu\|_B^2 \qquad \forall u \in W$$

alors ou bien il existe des $u \in W$ non nuls tels que $a(u, v)$ soit nul pour tout $v \in W$, ou bien la condition 3.1 est réalisée.

Démonstration.

Il résulte de la démonstration précédente, et plus particulièrement des relations 3.10 et 3.12 avec un choix convenable des coefficients β_i , que sous les hypothèses présentes, il existe $\alpha > 0$ et $\beta \in R$ tels que

$$a(u, u) \geqslant \alpha \left(\|s(u_0)\|^2_\Lambda + \|u^\circ\|^2_2\right) + \beta \|u\|^2_0 \qquad \forall u \in W$$

le coefficient β n'étant pas ici positif dans le cas général.

Il en résulte que $a(u, v)$ vérifie une inégalité de Gårding :

$$\exists\ \alpha > 0\ ,\ \lambda \in R\ ,\ \text{tels que}\quad a(u, u) - \lambda (u, u)_0 \geq \alpha \|u\|_W \quad \forall u \in W$$

L'injection dans $\left[L^2(\Omega)\right]^3$ de W étant compacte, et $a(u, v)$ étant **symétrique**, on en déduit (CF : [10] , [17] - les résultats s'étendent immédiatement au cas des systèmes) :

- que le problème suivant suit l'alternative de Fredholm :

$$u \in W\ ,\ a_\lambda(u, v) \equiv a(u, v) - \lambda (u, v)_0 = (f, v)_0 \quad \forall v \in W$$

où f est donnée dans $\left[L^2(\Omega)\right]^3$ et où $(\ ,\ )_0$ désigne le produit scalaire dans $\left[L^2(\Omega)\right]^3$

- que les valeurs propres, c'est à dire les valeurs de λ pour lesquelles le problème homogène possède une solution non nulle, forment une suite (réelle) non décroissante, tendant vers l'infini

- que si λ_0 est la plus petite de ces valeurs propres, pour tout $\lambda < \lambda_0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$a_\lambda(u, u) \geq \alpha \|u\|_W^2 \qquad \forall u \in W .$$

Il suffit donc pour obtenir la proposition 3.3 de vérifier que la plus petite valeur propre λ_0 est supérieure ou égale à zéro, ce qui est évident puisque $a(u, u)$ est positive.

3 - Proposition 3.4

Soient : - $N = N_0 \times N^0$ le noyau de l'application $u \to \left(\sigma(u_0), u^0_{\alpha\beta}\right)$ de $\mathcal{W}$ dans $(\Lambda)^2$

- $\bar{B}_0$, $\bar{B}^0$, $\bar{B} = \bar{B}_0 \times \bar{B}^0$ des espaces de Hilbert

- $\bar{L} = (\bar{L}_0, \bar{L}^0)$ une application de $\mathcal{W}$ dans $\bar{B}$ telle que $\bar{L}_0 \in \mathcal{L}\left(\left[H^1(\Omega)\right]^2 ; \bar{B}_0\right)$, $\bar{L}^0 \in \mathcal{L}\left(H^2(\Omega) ; \bar{B}^0\right)$ et que la réduction à N soit injective.

Alors la fonctionnelle : $u \to \left[\|\sigma(u_0)\|^2_\Lambda + \|u^\circ_{|\alpha\beta}\|^2_\Lambda + \|\bar{L}u\|^2_{\bar{B}} \right]^{1/2}$

est sur $\mathcal{W}$ une norme équivalente à la norme initiale

On remarque que cette proposition généralise au cas des coques quelconques les théorèmes 1.5 et 1.8 . Elle généralise également le point 3 du lemme 2.4 .

Démonstration.

Il suffit de montrer qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$(3.14) \quad \|u\|^2_{\mathcal{W}} \leq C \left[\|\sigma(u_0)\|^2_\Lambda + \|u^\circ_{|\alpha\beta}\|^2_\Lambda + \|\bar{L}u\|^2_{\bar{B}} \right] \qquad \forall u \in \mathcal{W}$$

Point 1 -

Supposons (3.14) non réalisée . Il existe alors une suite $u_n \in \mathcal{W}$ que l'on peut supposer normée $\left(\|u_n\|^2_{\mathcal{W}} = 1\right)$ telle que

$$\frac{1}{n} > \|\sigma(u_{on})\|^2_\Lambda + \|u^\circ_{n|\alpha\beta}\|^2_\Lambda + \|\bar{L}u_n\|^2_{\bar{B}}$$

d'où il résulte :

$$(3.15) \qquad \sigma(u_{on}) \to 0 \quad , \quad u^\circ_{n|\alpha\beta} \to 0 \ (\text{dans } \Lambda) \quad , \quad \bar{L}u_n \to 0 \ \text{dans } \bar{B}$$

Point 2 -

L'injection de $\mathcal{W}$ dans $\left[L^2(\Omega)\right]^2 \times H^1(\Omega)$ est compacte, et la suite u_n bornée dans $\mathcal{W}$. Il existe donc une sous suite, encore notée u_n , convergent dans $\left[L^2(\Omega)\right]^2 \times H^1(\Omega)$ vers un élément $u = (u_0 , u^\circ)$ de cet espace, ce qui entraine :

$$(3.16) \qquad s(u_n) \to s(u_0) \ \text{dans } \left(\mathcal{D}'(\Omega)\right)^4 \ , \ u^\circ_{n,\alpha\beta} \to u^\circ_{,\alpha\beta} \ \text{dans} \left[\mathcal{D}'(\Omega)\right]^4$$

Point 3 -

Des relations :

$$\sigma_{\alpha\beta}(u_{on}) = s_{\alpha\beta}(u_{on}) - A^\gamma_{\alpha\beta} u_{n\gamma} \quad ; \quad u^\circ_{|\alpha\beta} = u^\circ_{,\alpha\beta} - A^\gamma_{\alpha\beta} u^\circ_{,\gamma}$$

de 3.15 et du point 2 on déduit que $s(u_{on})$ et $u^o{}_{n,\alpha\beta}$ convergent dans Λ vers des éléments qui d'après 3.16 ne sont autres que $s(u_o)$ et $u^o{}_{,\alpha\beta}$. Il en résulte que $s(u_o)$ et $u^o{}_{,\alpha\beta}$ sont dans Λ, donc que u est dans $\mathcal{W}$, et que $u_n \to u$ dans $\mathcal{W}$

Point 4 -

De (3.15) et du résultat précédent, on déduit que $\sigma(u_o) = 0$, $u^o_{|\alpha\beta} = 0$, $\bar{L}u = 0$, donc que u est nul d'après l'hypothèse de surjectivité de $\bar{L}$, ce qui est contraire à l'hypothèse $\|u_n\|_{\mathcal{W}} = 1$. La proposition est ainsi établie.

Proposition 3.5

Sous les hypothèses de la proposition 3.4, et si il existe $\bar{\alpha} > 0$ tel que : $E_A(u) \geq \bar{\alpha}\,\|\bar{L}u\|^2_{\bar{B}}$ $\forall u \in W$
la condition 3.1 est réalisée.

Démonstration.

On a en effet alors, pour tout $u \in W$ et $\beta_i \in \,]0, 1[$:

$$a(u, u) \geq \beta_1 k_1 \|\sigma(u) + \lambda(u)\|^2_\Lambda + \beta_2 k_2 \|u^o_{|\alpha\beta}\|^2_\Lambda + \beta_3\,\bar{\alpha}\,\|\bar{L}u\|^2_{\bar{B}}$$

$$\geq \beta_1 k_1 (1-\beta_4)\|\sigma(u_o)\|^2_\Lambda - \beta_1 k_1\left(\frac{1}{\beta_4} - 1\right) B\,\|u^o\|^2_o + \tag{3.17}$$

$$+ \beta_2 k_2 \|u^o_{|\alpha\beta}\|^2_\Lambda + \beta_3\,\bar{\alpha}\,\|\bar{L}u\|^2$$

Utilisant la proposition précédente et la continuité de l'application $(0, u^o) \to u^o \in L^2(\Omega)$, il existe k tel que

$$\|u^o\|^2_o \leq k\,(0 + \|u^o_{|\alpha\beta}\|^2_o + \|\bar{L}u\|^2_{\bar{B}})$$

Il s'en suit dans (3.17) : (par exemple, pour $\beta_4 = 1/2$)

$$a(u, u) \geq \frac{\beta_1 k_1}{2}\|\sigma(u_o)\|^2_\Lambda + \|u^o_{|\alpha\beta}\|^2_\Lambda\,(\beta_2 k_2 - \beta_1 k_1 k) +$$

$$\|\bar{L}u\|^2_\Lambda\,(\bar{\alpha}\,\beta_3 - \beta_1 k_1 k)$$

On voit que pour réaliser 3.1 , il suffit de choisir les β_i tels que : $\beta_2 k_2 = 2 \beta_1 k_1 k$ et $\bar{\alpha} \beta_3 = 2 \beta_1 k_1 k$, ce qui est parfaitement possible.

Remarque 1 :

De la proposition 3-3 il résulte que ou bien la condition 3-1 est réalisée, ou bien il existe u non nul tel que $a(u , u) = 0$, donc tel que

$$E_{A_0}(u_0) = 0 \quad , \quad E^{\circ}_{A}(u^{\circ}) = 0 \quad , \quad E_e(u) = 0 \quad , \quad E_f(u) = 0$$

Soit encore : $L^{\circ} u^{\circ} = 0$, $L_0 u_0 = 0$, $u^{\circ}|_{\alpha\beta} = 0$, $\sigma(u_0) + \lambda(u^{\circ}) = 0$

On vérifie immédiatement que si L est injectif sur N, la deuxième éventualité est impossible.

Remarque 2 :

Considérons une application $\hat{f}$ différente de l'application f , pour laquelle nous définissons des fonctionnelles analogues à celles définies pour f

On a en particulier : $\sigma_{\alpha\beta}(u_0) = \hat{\sigma}_{\alpha\beta}(u_0) - (A^{\gamma}_{\alpha\beta} - \hat{A}^{\gamma}_{\alpha\beta}) u_{\gamma}$

et $u^{\circ}|_{\alpha\beta} = \hat{u}^{\circ}|_{\alpha\beta} - (A^{\gamma}_{\alpha\beta} - \hat{A}^{\gamma}_{\alpha\beta}) u^{\circ}|_{\gamma}$

Supposons que l'application $\bar{L}$ de la proposition 3-4 soit injective non pas sur N , mais sur $\hat{N}$, noyau de l'application $u \to (\sigma_{\alpha\beta}(u_0) , u^{\circ}|_{\alpha\beta})$

Alors, par une méthode analogue à celle utilisée pour la proposition 3-2, on montre que la condition 3-1 est réalisée si les quantités $A^{\gamma}_{\alpha\beta} - \hat{A}^{\gamma}_{\alpha\beta}$ sont suffisamment petites.

On pourra utiliser cette remarque par exemple dans les théories faisant intervenir de légères imperfections de la surface moyenne dues aux défauts de fabrication.

Dans toute la suite nous supposerons réalisée la condition (3.1), par exemple sous les hypothèses des propositions 3.4 et 3.5. Les problèmes 1. 2. 3 linéaires possèderont donc toujours dans la suite une, et une seule solution.

CHAPITRE IV

EQUATIONS NON LINEAIRES

Sommaire

Résultats préliminaires

On applique d'abord à notre problème un théorème d'analyse fonctionnelle dû à BROWDER [18]. On en déduit un critère d'existence locale de solution pour le problème 3 (proposition 4-1), et un critère global d'existence d'une solution du problème 3 réalisant le minimum absolu de l'énergie. (proposition 4-2).

Sous-Chapitre A

Ce sous chapitre exploite le second critère. Il étudie la coercivité (ou la non coercivité) de la fonctionnelle de l'énergie, condition suffisante de l'existence du minimum absolu.

- Le paragraphe 1 fournit la preuve de l'existence d'un minimum absolu pour des charges suffisamment faibles (proposition 4-3)

- Le paragraphe 2 donne la condition la plus fine que nous ayions obtenue, assurant l'existence d'un minimum absolu (proposition 4-4). La proposition (4-5) interprète cette condition lorsque la charge est de la forme $g = \lambda \bar{g}$, où $\bar{g}$ est donné (quelconque) et $\lambda \in R$ variable (charge progressive du système)

- Le paragraphe 3 donne la condition la plus fine que nous ayions obtenue, assurant la non existence d'un minimum absolu (E (u) non bornée inférieurement) (proposition 4-6), avec interprétation pour les charges $g = \lambda \bar{g}$, (proposition 4-7).

- Le paragraphe 4 étudie quelques propriétés des éléments des espaces intervenant dans l'énoncé des résultats des paragraphes précédents (proposition 4-8 Lemme 4-3), puis utilise les résultats du paragraphe 2 sous forme amoindrie (remarque 4-2 page IV-13) pour déduire un critère simple d'existence de minimum absolu, portant uniquement sur la direction des champs de forces tangentes et sur les conditions du montage, dont l'utilisation pratique ne suppose que la connaissance des géodésiques de la surface moyenne (proposition 4-9, complétée par les propositions 4-10, 4-11, 4-12, 4-13)

Sous chapitre B

Ce sous chapitre applique à l'exemple type défini au chapitre II les résultats établis au sous chapitre A.

Sous chapitre C

Ce sous chapitre utilise le critère d'existence locale établi dans les résultats préliminaires.

Le cadre général est celui-ci : on considère une charge $g = \gamma \bar{g}$, $\bar{g}$ donné quelconque, γ variable (≥ 0). On introduit la solution $\gamma \bar{u}$ du problème linéarisé, on étudie l'existence et l'unicité d'une solution du problème non linéaire voisine de $\gamma \bar{u}$, ainsi que certains renseignements concernant d'autres solutions éventuelles.

Le paragraphe 1 traite le problème dans le cas général. Les résultats obtenus sont des résultats limites, pour $\gamma \to 0$. On obtient :

- l'existence dans un voisinage de $\gamma \bar{u}$ de dimension tendant vers zéro comme γ^2, et l'unicité dans un voisinage de $\gamma \bar{u}$ de dimension indépendante de γ (proposition 4-15, page IV-60)

- la stabilité large (au sens : toute autre solution est à un niveau supérieur d'énergie) ainsi que, dans le cas particulier de coques de faible courbure, l'unicité globale (proposition 4-16 - page IV-64)

Le paragraphe 2 établit un résultat technique qui sera utilisé par la suite

Le paragraphe 3 donne quelques résultats intéressants concernant les solutions pour lesquelles la coque est tendue en tout point, et en particulier l'unicité et la stabilité globale d'une telle solution.

Le paragraphe 4 reprend l'étude du paragraphe 1 dans le cas où la solution linéaire est du type membrane, c'est-à-dire sans moment fléchissant. Les résultats obtenus sont analogues, mais avec précision concernant les valeurs de γ assurant ces résultats (proposition 4-18, 4-19, 4-20, 4-21)

L'étude débouche sur le problème des points de bifurcation de la solution linéaire, qui n'est pas étudié ici.

L'objet de ce chapitre est d'établir, dans certaines conditions de charges, des théorèmes d'existence de solution pour le problème 3 en théorie non linéaire.

Quelques résultats préliminaires

Nous utiliserons le théorème 4.1 énoncé ci-dessous, établi par F.E. BROWDER en [18].

Définition 4.1.- Soient B un espace de Banach reflexif réel, et $\Phi : B \times B \to R$. La fonction Φ est dite semi convexe si elle vérifie :

a) Pour tout $v \in B$ et tout $c \in R$, le sous ensemble $B(c,v)$ ci-dessous est convexe :

$$B(c,v) = \left\{ u \mid u \in B \ , \ \Phi(u \ , \ v) \leq c \right\}$$

b) L'application $u \to \Phi(u \ , \ v)$ est continue dans B fort pour tout v.

c) L'application $v \to \Phi(u \ , \ v)$ est continue dans B faible, quel que soit u, et uniformément lorsque u décrit un borné de B.

Théorème 4.1

Soient B un Banach réel réflexif, Φ une fonction réelle semi-convexe sur $B \times B$, C un sous ensemble borné faiblement fermé dans B.

La fonction $u \to f(u) = \Phi(u \ , \ u)$ est bornée inférieurement sur C et atteint son minimum sur C.

Corollaire

Si, en plus des hypothèses précédentes sur Φ, $f(u) \to +\infty$ lorsque $\| u \|_B \to +\infty$, alors f atteint son minimum sur B.

Reprenant les notations des chapitres précédents, nous choisirons ici :

$B = W$, sous espace fermé de $\mathcal{W}$ contenant $W_0 = \left[H_0^1 (\Omega) \right]^2 \times H_0^2 (\Omega)$

(4.1) $\Phi (u , v) = E_e (u , v) + E_f (u) + E_A (u) + E_p (u)$, avec :

(4.2) $E_e (u , v) = \mathcal{N} \left[\sigma (u) + \lambda (v) + \varphi (v) , \sigma (u) + \lambda (v) + \varphi (v) \right]$

$f (u)$ sera alors identique à l'énergie totale $E (u)$ dans le déplacement géométriquement admissible $u \in W$.

W est réflexif comme tout espace de Hilbert.

<u>Lemme 4.1</u> :

La fonction $\Phi (u , v)$ définie par (4.1) est semi convexe

<u>Démonstration.</u>

<u>Point (a)</u> - Φ se met sous la forme :

$$\Phi (u , v) = a (u , u) + b_v (u) + g_v \qquad \text{où}$$

$$a (w , t) = \mathcal{N} (\sigma (w) , \sigma (t)) + \mathcal{M} (\chi (w) , \chi (t)) + E_A (w , t)$$

est une forme bilinéaire symétrique positive,

$$b_v (u) = 2 \mathcal{N} (\sigma (u) , \lambda (v) + \varphi (v)) + E_p (u)$$

est linéaire en u , et où g_v est indépendant de u

Le point (a) en découle de façon classique : $\forall \lambda \in \left[0 , 1 \right]$, $\forall u_1$ et $u_2 \in B(c , v)$, on a :

$$a \left[\lambda u_1 + (1 - \lambda) u_2 , \lambda u_1 + (1 - \lambda) u_2 \right] + b_v \left[\lambda u_1 + (1 - \lambda) u_2 \right] + g_v =$$

$$= \lambda^2 a (u_1 , u_1) + 2 \lambda (1 - \lambda) a (u_1 , u_2) + (1 - \lambda)^2 a (u_2 , u_2) + \lambda (b_v(u_1) + g_v)$$

$$+ (1 - \lambda) (b_v (u_2) + g_v)$$

$$\leq \left[\lambda^2 + \lambda(1-\lambda)\right] a(u_1, u_1) + \left[(1-\lambda)^2 + \lambda(1-\lambda)\right] a(u_2, u_2) +$$

$$+ \lambda\left(b_v(u_1) + g_v\right) + (1-\lambda)\left[b_v(u_2) + g_v\right]$$

$$= \lambda\left[a(u_1, u_1) + b\, u_1 + g\right] + \left[1-\lambda\right]\left[a(u_2, u_2) + b\, u_2 + g\right]$$

$$\leq \lambda c + (1-\lambda) c = c$$

qui prouve que $\lambda u_1 + (1-\lambda) u_2 \in B(c, v)$

<u>Point (b)</u> - Il résulte immédiatement de la continuité forte évidente des fonctions introduites.

<u>Point (c)</u> - L'application $(u, v) \to E_e(u, v)$ est composée de $v \to \tilde{\varphi}(v) = \lambda(v) + \varphi(v)$ et de $(u, \tilde{\varphi}) \to \eta(\sigma(u) + \tilde{\varphi}, \sigma(u) + \tilde{\varphi})$

L'application $\lambda(v)$ est continue dans W faible puisque l'application identique de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ l'est. L'application $\varphi(v)$ se décompose en :

$$v \in W \xrightarrow{(1)} v^{\circ}_{|\alpha} = \frac{\partial v^{\circ}}{\partial x^{\alpha}} \in \left[H^1(\Omega)\right]^2 \xrightarrow{(2)} v^{\circ}_{|\alpha} \in \left[L^4(\Omega)\right]^2 \xrightarrow{(3)} \varphi(v) \in \Lambda$$

avec (1) linéaire continue, (2) faiblement continue d'après le théorème 1.5 et (3) continue. L'application φ, et par suite $\tilde{\varphi}$, est donc continue dans W faible.

Il reste donc à montrer que l'application

$$(u, \tilde{\varphi}) \to \eta(\sigma(u) + \tilde{\varphi}(v), \sigma(u) + \tilde{\varphi}(v)) = g(u, \tilde{\varphi})$$

est continue en $\tilde{\varphi}$ dans Λ, uniformément lorsque u est borné par M

Or : $|g(u, \tilde{\varphi}_1) - g(u, \tilde{\varphi}_2)| = |\eta(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_1) - \eta(\tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_2) + 2\eta(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2, \sigma(u))|$

$$\leq |\eta(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_1) - \eta(\tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_2)| + K_1 \| \tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2 \|_{\Lambda} \| \sigma(u) \|_{\Lambda}$$

avec $\| \sigma (u) \|_{\Lambda}$ borné d'après l'hypothèse $\| u \|_{W} \leq M$. Le lemme est donc établi.

Il résulte du théorème 4.1 que $E (u)$ atteint un minimum sur tout ensemble C borné et fermé dans W pour la topologie faible. En particulier, $E (u)$ atteint son minimum sur toute boule fermée, ou plus généralement, sur tout convexe fermé de W .

Un tel minimum ne constitue toutefois une solution du problème 3 que dans la mesure où il appartient à l'intérieur (supposé non vide) de ce convexe ou de cette boule. Cette condition est assurée dans les deux propositions suivantes :

Proposition 4.1

Soient $\tilde{u} \in W$, $\rho > 0$, $\beta > 0$ tels que :

$$E (\tilde{u} + \rho v) - E (\tilde{u}) \geq \beta \quad \forall v , v \in W , \| v \|_{W} = 1 \tag{4.3}$$

Le problème 3 possède une solution dans la boule ouverte de centre $\tilde{u}$ et de rayon ρ .

Cette proposition résulte immédiatement de ce qui a été dit . On peut évidemment l'améliorer, en prenant un convexe borné au lieu d'une sphère, en remplaçant dans (4.3) $E (\tilde{u})$ par $E (\tilde{\tilde{u}})$ où $\tilde{\tilde{u}}$ est un élément donné de la sphère ouverte de centre $\tilde{u}$ et de rayon ρ , etc ...

On remarque que l'on obtient ainsi un théorème d'existence de minimum local de $E (u)$. La proposition ci-dessous fournit par contre un théorème d'existence de minimum absolu pour $E (u)$.

Proposition 4.2

Si $E (u)$ tend vers l'infini avec $\| u \|_{W}$, alors $E (u)$ atteint son minimum absolu sur W.

Démonstration.

Il suffit d'appliquer la proposition 4.1 avec $\tilde{u} = 0$, et ρ suffisamment grand pour avoir :

$$E(\rho v) - E(0) \geq k^2 \quad \forall v : v \in W , \| v \|_{W} = 1 , \quad k \text{ donné} \neq 0$$

SOUS CHAPITRE A : MINIMUM ABSOLU DE E (u)

Rappelons que dans tout ce chapitre on suppose réalisées les hypothèses des propositions (3.4) et (3.5) assurant l'existence et l'unicité de la solution du problème linéaire. On se propose en particulier dans ce sous chapitre de rechercher à quelles conditions supplémentaires l'hypothèse :

$$(4.4) \qquad \lim_{\|u\|_{W} \to \infty} E(u) = +\infty$$

de la proposition (4.2) , assurant l'existence d'un minimum absolu de E (u) sur W , est réalisée.

1.- Une condition suffisante pour que E (u) atteigne son minimum absolu sur W.

Proposition 4.3

On pose : $E_p(u) = \langle g_0 , u_0 \rangle_V + \langle g^\circ , u^\circ \rangle_{H^2(\Omega)}$

Il existe une constante $K > 0$ telle que la condition (4.4) soit réalisée pour tout g tel que $\| g_0 \|_V \leq K$

Démonstration.

Supposons que E (u) ne tende pas vers l'infini avec $\| u \|_{W}$

Point 1 - Il existe une suite $u_n \in W$, tendant vers l'infini en norme, et telle que $E(u_n)$ soit bornée. On aura pour cette suite, compte tenu des

hypothèses des propositions (3.4) et (3.5) :

$$E(u_n) \geq k_1 \|\sigma(u_n) + \lambda(u_n) + \varphi(u_n)\|_\Lambda^2 + k_2 \|u^\circ_{n|\alpha\beta}\|_\Lambda^2 + \bar{\alpha} \|\bar{L} u_n\|_{\bar{B}}^2$$

$$- \|g_o\| \|u_{on}\|_V - \|g^\circ\| \|u^\circ_n\|_{H^2}$$

$$\geq k_1 (1-\beta) \|\sigma(u_n) + \varphi(u_n)\|_\Lambda^2 + \bar{\alpha} \|\bar{L}_o u_{on}\|_{B_o}^2 - \|g_o\| \|u_{on}\|$$

$$+ \inf(k_2, \bar{\alpha}) \|u^\circ_n\|_{H^2}^2 - k_2 \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) \|\lambda(u_n)\|_\Lambda^2 - \|g^\circ\| \|u^\circ_n\|, \ \forall \beta \in]0,1[$$

Or, $\|\lambda(u)\|_\Lambda^2 \leq k_3 \|u^\circ\|_{H^2}^2$. Donc, pour un choix convenable de β :

$$1 < \frac{1}{\beta} < 1 + \frac{\inf(k_2, \bar{\alpha})}{k_2 k_3} \qquad \text{on aura :}$$

$$(4.5) \qquad E(u_n) \geq k_4 \|\sigma(u_{on}) + \varphi(u^\circ_n)\|_\Lambda^2 + \bar{\alpha} \|\bar{L}_o u_{on}\|_{\bar{B}_o}^2 - \|g_o\| \|u_{on}\|_V$$

$$+ k_5 \|u^\circ_n\|_{H^2}^2 - \|g^\circ\| \|u^\circ_n\|_{H^2}$$

<u>Point 2</u> - Montrons que la suite $\|u^\circ_n\|_{H^2}$ tend vers l'infini. S'il n'en était pas ainsi, il existerait une constante B et une sous suite, encore notée u_n, telle que $\|u^\circ_n\|_{H^2} \leq B$ et $\lim_{n\to\infty} \|u_{on}\| = \infty$. Pour cette sous suite, on déduirait de (4.5) :

$$E(u_n) \geq \frac{k_4}{2} \|\sigma(u_{on})\|_\Lambda^2 + \bar{\alpha} \|\bar{L}_o u_{on}\|_{\bar{B}_o}^2 - \|g_o\| \|u_{on}\|_V + f(u^\circ_n)$$

$$\geq \inf\left(\frac{k_4}{2}, \bar{\alpha}\right) \|u_{on}\|_V^2 - \|g_o\| \|u_{on}\|_V + f(u^\circ_n) \quad , \quad \text{avec}$$

$$f(u^\circ_n) = -k_4 \|\varphi(u^\circ_n)\|_\Lambda^2 + k_5 \|u^\circ_n\|_{H^2}^2 - \|g^\circ\| \|u^\circ_n\| \quad , \quad \text{fonction bornée}$$

On aurait donc $\lim_{n\to\infty} E(u_n) = \infty$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Point 3 - Il résulte de (4.5), en désignant par A la borne supérieure de $E(u_n)$:

$$A \geq E(u_n) \geq k_5 \| u^o_n \|^2_{H^2} - \| g^o \| \| u^o_n \|_{H^2} - \| g_o \| \| u_{on} \|_V$$

Tenant compte du point 2 , on voit que $\| u_{on} \|_V$ tend également vers l'infini et que, plus précisément, pour n suffisemment grand :

$$(4.6) \qquad \| u_{on} \|_V \geq \frac{k_6}{\| g_o \|} \| u^o_n \|^2_{H^2} \quad , \quad \text{avec} \quad 0 < k_6 < k_5$$

Point 4 - On a , pour tout $u \in W$:

$$\| \varphi(u) \|^2_\Lambda = \frac{\mu^2}{4} \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \int_\Omega \left(u^o_{|\alpha} u^o_{|\beta}\right)^2 dx \leq \frac{\mu^2}{4} \sum_{\alpha,\beta} \left[\int_\Omega (u^o_{|\alpha})^4 dx\right]^{1/2} \left[\int_\Omega \left(u^o_{|\beta}\right)^4 dx\right]^{1/2}$$

$$\leq \frac{\mu^2}{4} \left[\sum_\alpha \| u^o_{|\alpha} \|^2_{L^4(\Omega)}\right]^2$$

Utilisant la continuité de l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^4(\Omega)$ (Th.1.3) , il vient :

$$(4.7) \qquad \| \varphi(u) \|^2_\Lambda \leq k_7 \left(\sum_\alpha \| u^o_{|\alpha} \|^2_{H^1(\Omega)}\right)^2 \leq k_8 \| u^o \|^4_{H^2(\Omega)} \quad , \quad \forall u \in W.$$

Soit, compte tenu de (4.6) :

$$\| \varphi(u^o_n) \|^2_\Lambda \leq k_9 \| g^o \|^2 \| u_{on} \|^2_V$$

Point 5 - Il résulte de (4.5) , pour tout $\beta \in]0, 1[$:

$$E(u_n) \geq k_4 (1-\beta) \| \sigma(u_{on}) \|^2_\Lambda - k_4 \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) \| \varphi(u^o_n) \|^2_\Lambda + \bar{a} \| \bar{L}_o u_{on} \|^2_{\bar{B}_o}$$

$$- \| g_o \| \| u_{on} \|_V + k_5 \| u^o_n \|^2_{H^2} - \| g^o \| \| u^o_n \|_{H^2}$$

Or : $k_4 (1 - \beta) \| \sigma (u_{on}) \|^2_{\Lambda} + \bar{a} \| \bar{L}_o u_{on} \|^2_{\bar{B}_o} \geqslant$

$$k_4 (1 - \beta) \left[\| \sigma (u_{on}) \|^2_{\Lambda} + \frac{\bar{a}}{k_4} \| \bar{L}_o u_{on} \|^2_{\bar{B}_o} \right]$$

$$\geqslant k_{10} \; k_4 (1 - \beta) \| u_{on} \|^2_V$$

Il vient donc, compte tenu du point 4 :

$$E (u_n) \geqslant k_4 (1 - \beta) \left[k_{10} - \frac{k_9 \| g_o \|^2}{\beta} \right] \| u_{on} \|^2_V - \| g_o \| \| u_{on} \|_V$$

$$+ k_5 \| u^o_n \|^2_{H^2} - \| g^o \| \| u^o_n \|_{H^2} \qquad \forall \beta \in \left] 0 , 1 \right[$$

On constate que si on a $\| g_o \|^2 < \frac{k_{10}}{k_9}$, on peut choisir β de façon à rendre le coefficient de $\| u_{on} \|^2_V$ strictement positif. Il en résultera que $E (u_n)$ tendra vers l'infini avec n, ce qui est contraire à l'hypothèse . La proposition est donc établie.

Remarque 4.1 - La condition $\| g_o \| < K$ restreint sensiblement le champ d'application. Elle écarte le cas de charges tangentes à la surface moyenne, à l'intérieur ou sur les bords, trop importantes. Cette restriction peut-être améliorée comme nous le verrons par la suite, mais certainement pas levée complètement comme le montre l'exemple ci-dessous. Enfin, la nécessité d'hypothèses restrictives est due en fait au caractère approché de la théorie des coques utilisée. En particulier, l'exemple ci-dessous ne prouve plus rien si on rétablit dans $\varepsilon_{11} (x)$ le terme $\frac{1}{2} \left(\frac{d u_1}{d x^1} \right)^2$ qui a été négligé.

Exemple 4.1 - Plaque homogène d'épaisseur constante, rectangulaire, encastrée suivant un côté, soit Γ_1, et chargée uniformément le long du côté parallèle au précédent, parallèlement aux autres cotés.

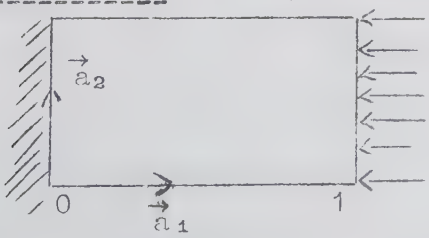


Fig. 4.1

Les conditions aux limites géométriques imposent :

$$W = \left\{ u \mid u \in \mathcal{W},\ u^{o}_{|\Gamma_1} = \frac{du^{o}}{dx^1}_{|\Gamma_1} = 0 \quad , \quad u_{1|\Gamma_1} = u_{2|\Gamma_1} = 0 \right\}$$

Par ailleurs, $E_A(u) = 0$. Choisissant :

$$\overline{B}_o = \left[L^2(\Gamma_1)\right]^2 \quad , \quad \overline{L}_o : u_o \longrightarrow (u_{1|\Gamma_1} \ , \ u_{2|\Gamma_1})$$

$$\overline{B}^o = \left[L^2(\Gamma_1)\right]^2 \quad , \quad \overline{L}^o : u^o \longrightarrow (u^o_{|\Gamma_1} \ , \ \frac{du^o}{dx^1}_{|\Gamma_1})$$

on vérifie que l'on est bien dans les conditions d'application des propositions (3.4) et (3.5) . En particulier :

$$0 = \|\overline{L}u\|^2_{\overline{B}} \geqslant \alpha\, E_A(u) = 0 \qquad \forall u \in W .$$

Dans le cas particulier d'un déplacement ne dépendant que de x^1 , on a :

$$\varepsilon_{11}(u) = \frac{du_1}{dx^1} + \frac{\mu}{2}\left(\frac{du^o}{dx^1}\right)^2 \quad , \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{22} = 0 \quad , \quad \chi_{11} = \frac{d^2u^o}{dx^1{}^2} \quad , \quad \chi_{12} = \chi_{22} = 0$$

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{du_1}{dx^1} + \frac{\mu}{2}\left(\frac{du^o}{dx^1}\right)^2\right]^2 dx^1 + \frac{1}{12}\int_0^1 \left[\frac{d^2u^o}{dx^1{}^2}\right]^2 dx^1 - F\,u_1(1)$$

où F est la densité de charge constante.

Pour la suite $u_n = \left(-\frac{\mu}{2}\, n^2\, x^{1^3} \ , \ 0 \ , \ \frac{1}{2}\, n\, x^{1^2}\right)$, qui est dans W , on a :

$$\varepsilon_{11}(u_n) = 0 \quad , \quad E(u_n) = \frac{1}{12}\, n^2 + \frac{F\mu}{6}\, n^2 .$$

Lorsque n , donc aussi $\|u_n\|$, tend vers l'infini, $E(u_n)$ tend vers moins l'infini si F est inférieur à $-\frac{1}{2\mu}$.

On remarque évidemment que les déplacements u_n ici envisagés , pour lesquels $\frac{\partial u_1}{\partial x^1}$ est prépondérant devant $\frac{\partial u^o}{\partial x^1}$, sont de ceux pour lesquels la théorie approchée utilisée n'est absoluement pas adaptée. Cette remarque montre l'origine de la difficulté, mais n'y remédie pas, dans la mesure où on

n'envisage pas d'utiliser les équations exactes par trop complexes.

On peut toutefois remarquer que dans l'exemple précédent, la condition $F < -\frac{1}{2\mu}$ est moins restrictive que la condition $\|g_0\|_V \leq K$ de la proposition 4.3 . Cela incite à la recherche de conditions moins fortes sur les charges tangentes , ce que nous faisons en particulier dans les paragraphes suivants.

2.- Une autre condition suffisante de minimum absolu

Définissons d'abord quelques ensembles :

a) $V_A = \left\{ u_0 \mid (u_0 , 0) \in W , E_{A_0}(u_0) = 0 \right\}$. Cet ensemble est un sous espace vectoriel fermé de V : d'une façon générale, si $a(u) = a(u , u)$ est une forme quadratique positive associée à la forme bilinéaire $a(u , v)$ sur un espace de Hilbert H, on a pour tout u tel que $a(u) = 0$:

$$0 \leq a(v + \lambda u) = a(v) + 2\lambda\, a(u , v) \qquad \forall \lambda \in R \text{ et } \forall v \in H .$$

Il en résulte que $a(u , v) = 0 \quad \forall v \in H$. On en déduit immédiatement que le noyau de $a(u)$ est un sous espace vectoriel de H , fermé si $a(u)$ est continue .

b) Λ_A : image de V_A dans l'application $\sigma \in \mathcal{L}(\mathcal{V} ; \Lambda)$.

Cette image est un sous espace vectoriel de Λ. Montrons qu'elle est fermée. Soit u_n une suite de V_A telle que $\sigma(u_n) \to \lambda$ dans Λ .

La suite $\sigma(u_n)$ est de Cauchy . Or (théorème 3.4 - $E_{A_0}(u_0) = 0 \Rightarrow \|\bar{L}_0 u_0\|_{\bar{B}_0} = 0$ - Hypothèses de 3.5 supposées vérifiées) $\|\sigma(u)\|_\Lambda$ est une norme équivalente à la norme initiale dans V_A . La suite u_n est donc de Cauchy dans V_A , donc converge vers un élément v de V_A . Donc : $\sigma(u_n) \to \sigma(v)$ et, à la limite, $\lambda = \sigma(v)$. Donc $\lambda \in \Lambda_A$ et par suite Λ_A est fermé. Remarquons que σ est injective sur V_A . C'est un isomorphisme topologique entre σ_A et V_A.

c) $\Phi^\circ = \left\{ v^\circ \mid (0, v^\circ) \in W \ , \ \varphi(v^\circ) \in \Lambda_A \right\}$. Cet ensemble n'est pas un espace vectoriel . Par contre, si $v^\circ \in \Phi^\circ$, $\lambda v^\circ \in \Phi^\circ \ \forall \lambda \in R$. Pour tout $v^\circ \in \Phi^\circ$, on pose $v_0(v^\circ) = -\sigma^{-1}\left[\varphi(v^\circ)\right]$.
Φ° contient éventuellement les fonctions v° constantes . $\Phi^{\circ *}$ désigne l'ensemble Φ° diminué de ces fonctions constantes .

d) $\Phi = \left\{ v \mid v \in W \ , \ E_{A_0}(v_0) = 0 \ , \ \sigma(v_0) + \varphi(v^\circ) = 0 \right\}$
On a encore : $\Phi = \left\{ v \mid v = (v_0(v^\circ), v^\circ) \ , \ v^\circ \in \Phi^\circ \right\}$. On désigne par Φ^* l'ensemble Φ diminué des éléments de la forme $v_0 = 0$, $v^\circ = \text{cste}$.
Pour tout $v \in \Phi^*$, $\sigma(v_0) \neq 0$.

Proposition 4.4

Si Φ^* est vide, ou si , Φ^* n'étant pas vide, on a :

(4.8) $K(v) = \mathcal{M}\left[\chi(v^\circ)\right] + E^\circ_A(v^\circ) + \langle g_0 , v_0 \rangle \quad > 0 \quad \forall v \in \Phi^*$

alors la condition (4.4) est vérifiée, et par conséquent $E(u)$ atteint son minimum sur W .

Démonstration

Supposons que (4.4) ne soit pas vérifiée.

Point 1 - On a vu dans la démonstration de la proposition (4.3) que si (4.4) n'est pas vérifiée, il existe une suite $u_n \in W$, k et A positifs, tels que :

(4.9) $\|u_{on}\|_V \to \infty \ ; \ \|u^\circ_n\|_{H^2} \to \infty \ ; \ \|u_{on}\|_V \geq k \|u^\circ_n\|^2_{H^2} \ ; \ E(u_n) \leq A$

qui entraîne en particulier

(4.10) $A \geq E(u_n) \geq (1-\beta)\mathcal{M}\left[\sigma(u_{on}) + \varphi(u^\circ_n)\right] - (\frac{1}{\beta} - 1)\mathcal{M}\left[\lambda(u^\circ_n)\right]$

$+ \mathcal{M}\left[\chi(u^\circ_n)\right] + E_A(u_n) + \langle g_0 , u_{on} \rangle + \langle g^\bullet , u^\circ_n \rangle \quad \forall \beta \in]0,$

<u>Point 2</u> - Considérons la suite v_n ci-dessous :

$$v_n = (v_{on}\ ,\ v^o{}_n)\quad ;\quad v_{on} = \frac{u_{on}}{N}\quad ;\quad v^o{}_n = \frac{u^o{}_n}{N^{1/2}}\ ,\quad N = \| u_{on} \|_V$$

Il résulte de (4.9) que cette suite est bornée dans W , donc faiblement compacte . Il existe donc $v = (v_o\ ,\ v^o) \in W$, et une sous suite encore notée v_n , convergent vers v faiblement dans $\mathcal{W}$, donc fortement dans l'espace $\left[L^2(\Omega)\right]^2 \times W^1_4(\Omega)$ (9) .

<u>Point 3</u> - On déduit de (4.10) , pour cette sous suite :

$$\frac{A}{N^2} \geq \underline{(1-\beta)\,\mathcal{N}\left[\sigma(v_{on}) + \varphi(v^o{}_n)\right]} - \left(\frac{1}{\beta} - 1\right)\frac{1}{N}\,\mathcal{N}\left[\lambda(v^o{}_n)\right] + \frac{1}{N}\,\mathcal{M}\left[\chi(v^o{}_n)\right]$$

$$\underline{+\ E_{A_o}(v_{on})} + \frac{1}{N}\,E^o_A(v^o{}_n) + \frac{1}{N} < g_o\ ,\ v_{on} > + \frac{1}{N^{3/2}} < g^o\ ,\ v^o{}_n >$$

Puisque v_n est bornée , et que $N \to \infty$, on vérifie que tous les termes non soulignés tendent vers zéro . De plus, chacun des deux termes soulignés est positifs. Ils tendent donc chacun vers zéro :

$$(4.11)\qquad \lim_{n\to\infty} \mathcal{N}\left[\sigma(v_{on}) + \varphi(v^o{}_n)\right] = 0$$

$$(4.12)\qquad \lim_{n\to\infty} E_{A_o}(v_{on}) = 0$$

<u>Point 4</u> - Il résulte de (4.11) que $\sigma(v_{on}) + \varphi(v^o{}_n) \to 0$ dans Λ . Or, $\varphi(v^o{}_n) \to \varphi(v^o)$ puisque φ est continue dans $W^1_4(\Omega)$. Donc $\sigma(v_{on})$ converge aussi dans Λ , vers $-\varphi(v^o)$. Or , $v_{on} \to v_o$ dans $\left[L^2(\Omega)\right]^2$ entraîne dans $\left[\mathcal{D}'(\Omega)\right]^4$: $\sigma(v_{on}) \to \sigma(v_o)$. On a donc $\sigma(v_o) = -\varphi(v^o)$.

---

(9) - D'une façon générale , $W^k_p(\Omega)$ désigne l'espace (de Sobolev) des distributions appartenant, ainsi que toutes leurs dérivées d'ordre inférieur ou égal à k , à $L^p(\Omega)$. Le résultat énoncé ici résulte directement du théorème 1.3 .

De plus, v_{on} tend vers v_o également dans $\mathcal{V}$ fort . On a donc finalement, compte tenu de (4.12) et de la continuité de $E_{A_o}(u_o)$:

$$(4.13)\begin{cases} v_{on} \to v_o \text{ dans } \mathcal{V} \text{ fort} \quad ; \quad v^o{}_n \to v^o \text{ dans } H^2(\Omega) \text{ faible} \\ \| v_o \|_{\mathcal{V}} = 1 \quad ; \quad \sigma(v_o) + \varphi(v^o) = 0 \quad ; \quad E_{A_o}(v_o) = 0 \end{cases}$$

Il en résulte en particulier que $v \in \Phi^*$.

<u>Point 5</u> - Toujours pour la sous suite ci-dessus, on a :

$$A \geq E(u_n) \geq \mathcal{M}\left[\chi(u^o{}_n)\right] + E^o{}_A(u^o{}_n) + \langle g_o , u_{on} \rangle + \langle g^o , u^o{}_n \rangle$$

et par conséquent :

$$\frac{A}{N} \geq \mathcal{M}\left[\chi(v^o{}_n)\right] + E^o{}_A(v^o{}_n) + \langle g_o , v_{on} \rangle + \frac{1}{N^{1/2}} \langle g^o , v^o{}_n \rangle$$

La forme quadratique $\Phi(u^o) = \mathcal{M}\left[\chi(u^o)\right] + E^o{}_A(u^o)$ est positive et continue dans $H^2(\Omega)$ fort . Elle est donc semi continue inférieurement dans $H^2(\Omega)$ faible (10). Passant à la limite à gauche et à la limite inférieure à droite, lorsque $n \to \infty$, il vient, puisque $v^o{}_n \to v^o$ dans $H^2(\Omega)$ faible :

$$0 \geq \mathcal{M}\left[\chi(v^o)\right] + E^o{}_A(v^o) + \langle g_o , v_o \rangle$$

qui est en contradiction avec l'hypothèse. La proposition est donc établie.

<u>Remarque 4.2</u> - Si $\langle g_o , v_o(v^o) \rangle$ est positif pour tout $v^o \in \Phi^{o*}$, $E(u)$ atteint son minimum sur W . Il suffit en effet de remar-

---

(10) - Ce résultat est classique. Brièvement : Φ étant positive est convexe, ce qui entraîne que $\Phi^{-1}([-\infty , \lambda])$ est convexe $\forall \lambda \in R$, mais aussi fortement fermé puisque Φ est fortement continue . Ces ensembles étant convexes et fermés forts sont aussi fermés faibles pour tout λ , ce qui est une C N S pour la semi continuité faible inférieure .

quer que tout $v^\circ \in \Phi^{\circ *}$ est non nul, donc que $E^\circ_A(v^\circ) + \mathcal{M}\left[\chi(v^\circ)\right]$ est strictement positif sur $\Phi^{\circ *}$. Cette remarque sera exploitée au paragraphe 4.

Enoncé équivalent pour la proposition 4.4

Soit a une constante strictement positive quelconque. Si une des conditions (i) et (ii) est vérifiée, $E(u)$ atteint son minimum sur W :

(i) $X = \left\{ v^\circ \mid v^\circ \in \Phi^{\circ *} \ , \ < g_0 , v_0(v^\circ) > \ = -a \right\} = \emptyset$

(ii) $X \neq \emptyset \ ; \ a < \inf_{v^\circ \in X} P(v^\circ) \equiv \mathcal{M}\left[\chi(v^\circ)\right] + E^\circ_A(v^\circ)$

Démonstration

Remarquons d'abord que (4.8) est équivalent à :

ou bien : (j) $\tilde{X} = \left\{ v^\circ \mid v^\circ \in \Phi^{\circ *} \ , \ < g_0 , v_0(v^\circ) > \ < 0 \right\} = \emptyset$

ou bien : (jj) $\tilde{X} \neq \emptyset \ ; \ K(v^\circ) = P(v^\circ) + < g_0 , v_0(v^\circ) > > 0 \ \forall \ v^\circ \in \tilde{X}$

Si $v^\circ \in \Phi^{\circ *}$, alors $k v^\circ \in \Phi^{\circ *} \ \forall k \in R$, $k \neq 0$, et $v_0(k v^\circ) = k^2 v_0(v^\circ)$

Donc : $\tilde{X} = \left\{ v^\circ \mid v^\circ = k w^\circ \ , \ w^\circ \in X \ , \ k \neq 0 \right\}$, qui montre que X et $\tilde{X}$ sont vides simultanément, donc que (i) et (j) sont équivalents.

La condition (jj) s'écrit encore :

$$X \neq \emptyset \ ; \ P(k w^\circ) + < g^\circ , v_0(k w^\circ) > > 0 \ \forall k \neq 0 \ , \ \forall w^\circ \in X$$

Le membre de gauche est homogène de degré 2 en k. Divisant par $k^2 \neq 0$, on obtient pour (jj) : $X \neq \emptyset$, $P(w^\circ) > a \ \forall w^\circ \in X$ qui est équivalent à (ii) dans la mesure où $P(w^\circ)$ atteint son minimum sur X, ce que nous allons montrer.

La fonctionnelle $(P(w^o)$ est bornée inférieurement par zéro, donc possède une plus grande borne inférieure P. Soit $w^o{}_n$ une suite minimisante :

$w^o{}_n \in X$, $P(w^o{}_n) \to P$. On a (théorèmes 3.4 - 3.5) :

$$P(w^o{}_n) \geq k_2 \| w^o{}_n{}_{|\alpha\beta} \|^2_\Lambda + \tilde{\alpha} \| \bar{L}^o w^o{}_n \|^2_{\bar{B}^o} \geq k \| w^o{}_n \|^2_{H^2(\Omega)}$$

La suite $w^o{}_n$ est donc bornée dans $H^2(\Omega)$, et par conséquent contient une sous suite convergent vers un élément $\bar{w}^o$ de $H^2(\Omega)$, faiblement dans $H^2(\Omega)$.

Or, X, antécédent du fermé $\left\{ -a \right\}$ dans l'application

$v^o \to < g_o , -\sigma^{-1}\left(\varphi(v^o)\right) >$ continue de $H^2(\Omega)$ faible dans R, est fermé dans $H^2(\Omega)$ faible, et par conséquent contient $\bar{w}^o$. On a donc : $P(\bar{w}^o) \geq P$. Par ailleurs, $P(w^o)$ étant semi continue inférieurement dans $H^2(\Omega)$ faible, on a :

$$P = \lim_{n \to \infty} P(w^o{}_n) \geq P(\bar{w}^o)$$

Il en résulte que $P(\bar{w}^o) = P$, donc que $P(w^o)$ atteint son minimum sur X en $\bar{w}^o$.

<u>Cas d'une charge tangente de la forme $g_o = \gamma \bar{g}_o$</u>

Soit $X(r, g) = \left\{ v^o \mid v^o \in \Phi^{o*} , < g_o , v_o(v^o) > = r \right\}$,

On a : $X(-a, g) = X$; $X(\lambda r, \lambda g) = X(r, g) \; \forall \lambda \in R , \lambda \neq 0$

Le cas $\gamma = 0$ ne pose évidemment aucun problème. Pour $\gamma \neq 0$, on applique la proposition (4.4) sous la forme précédente, en choisissant $a = |\gamma|$, et en remarquant que $X\left[-|\gamma| , g_o\right] = X\left[-sg\gamma , \bar{g}_o\right]$ où $sg\gamma$ est le signe de γ.

On aboutit alors aux résultats ci-dessous

Proposition 4.5

Sous l'action de charges tangentes proportionnelles au paramètre γ, $g_0 = \gamma \bar{g}_0$, $E(u)$ atteint son minimum absolu sur W si $\gamma \in \left]\gamma-, \gamma+\right[$, avec :

$$0 > \gamma- = \begin{cases} -\infty, \text{ si } X(1, \bar{g}_0) = \emptyset \text{ c.a.d. si } \langle \bar{g}_0, v_0(v^\circ) \rangle \leq 0 \ \forall v^\circ \in \Phi^{\circ *} \\ -\inf\limits_{\hookrightarrow v^\circ \in X(1, \bar{g}_0)} P(v^\circ) \quad , \quad \text{si } X(1, \bar{g}_0) \neq \emptyset \end{cases}$$

$$0 < \gamma+ = \begin{cases} +\infty, \text{ si } X(-1, \bar{g}_0) = \emptyset \text{ c.a.d. si } \langle \bar{g}_0, v_0(v^\circ) \rangle \geq 0 \ \forall v^\circ \in \Phi^{\circ *} \\ +\inf\limits_{\hookrightarrow v^\circ \in X(-1, \bar{g}_0)} P(v^\circ) \quad , \quad \text{si } X(-1, \bar{g}_0) \neq \emptyset \end{cases}$$

3.- Une condition suffisante pour que $E(u)$ n'atteigne pas son minimum sur W.

Il résulte des relations et hypothèses (2.2) et (2.3) que l'application $y, z \to \mathcal{N}(y, z)$ est un produit scalaire dans Λ. On désigne par $\Lambda^{\perp}_A$ le sous espace (fermé) de Λ orthogonal à Λ_A pour ce produit scalaire, et par ${}^{(1)}y$ et ${}^{(2)}y$ les composantes de $y \in \Lambda$ sur Λ_A et $\Lambda^{\perp}_A$ respectivement.

Soit $B(v^\circ) = \left\{ y \mid y \in \Lambda^{\perp}_A, \ y = {}^{(2)}\varphi(v^\circ, w^\circ), \ (0, w^\circ) \in W \right\}$ où v° est un élément donné tel que $(0, v^\circ) \in W$. On désigne par $\overline{B(v^\circ)}$ la fermeture de $B(v^\circ)$ dans Λ, par $B(v^\circ)^{\perp}$ le sous espace fermé orthogonal à $\overline{B(v^\circ)}$ dans $\Lambda^{\perp}_A$, et par ${}^{(3)}y$ et ${}^{(4)}y$ les composantes dans $\overline{B(v^\circ)}$ et $B(v^\circ)^{\perp}$ de ${}^{(2)}y \in \Lambda^{\perp}_A$.

On a pour tout $y \in \Lambda$: $y = {}^{(1)}y + {}^{(3)}y + {}^{(4)}y$ et

$$\mathcal{N}(y, y) = \sum_{i=1,3,4} \mathcal{N}({}^{(i)}y, {}^{(i)}y) .$$

Proposition 4.6

Si il existe $v^\circ \in \Phi^{\circ *}$ tel que

$$(4.14) \qquad \overline{K}(v^\circ) \equiv \mathcal{N}\left[{}^{(4)}\lambda(v^\circ)\right] + \mathcal{M}\left[\chi(v^\circ)\right] + E^\circ_A(v^\circ) + \langle g_0 , v_0(v^\circ)\rangle < 0$$

Alors $E(u)$ n'est pas bornée inférieurement sur W.

Démonstration

Soit $v^\circ \in \Phi^{\circ *}$ vérifiant 4.14 et soit $v_0 = v_0(v^\circ)$. Considérons la suite :

$$u_n = (n\, v_0 + n^{1/2} w_0 \;,\; n^{1/2} v^\circ + w^\circ)$$

où $w = (w_0 , w^\circ) \in W$ sera précisé par la suite. On a pour cette suite :

$$\varepsilon(u_n) = n^{1/2}\left(\sigma(w_0) + 2\,\varphi(v^\circ , w^\circ) + \lambda(v^\circ)\right) + \lambda(w^\circ) + \varphi(w^\circ)$$

puisque $\sigma(v_0) + \varphi(v^\circ) = 0$. Par conséquent :

$$E(u_n) = n\left[\mathcal{N}\left(\sigma(w_0) + 2\,\varphi(v^\circ , w^\circ) + \lambda(v^\circ)\right) + \mathcal{M}\left(\chi(v^\circ)\right) + E^\circ_A(v^\circ) + \langle g_0\, v_0\rangle\right]$$

$$+ n^{1/2}\left[A\right] + \left[B\right]$$

où les crochets $\left[A\right]$ et $\left[B\right]$ sont indépendants de n. Il suffit donc de montrer que sous les hypothèses retenues, on peut choisir w de façon à rendre le crochet facteur de n négatif. Or, $\sigma(w_0) \in \Lambda_A$ pourvu que $w_0 \in V_A$, et ${}^{(2)}\varphi(v^\circ , w^\circ) \in B(v^\circ)$. Donc :

$$\mathcal{N}\left(\sigma(w_0) + 2\,\varphi(v^\circ , w^\circ) + \lambda(v^\circ)\right) = \mathcal{N}\left(\sigma(w_0) + 2\,{}^{(1)}\varphi(v^\circ , w^\circ) + {}^{(1)}\lambda(v^\circ)\right)$$

$$+ \mathcal{N}\left(2\,{}^{(2)}\varphi(v^\circ , w^\circ) + {}^{(3)}\lambda(v^\circ)\right) + \mathcal{N}\left({}^{(4)}\lambda(v^\circ)\right)$$

On peut choisir w° de telle sorte que $\mathcal{N}\left(2\,{}^{(3)}\varphi(v^\circ , w^\circ) + {}^{(3)}\lambda(v^\circ)\right)$ soit aussi petit que l'on veut, par exemple inférieur à $-\frac{1}{2}\overline{K}(v^\circ)$. Ce choix

étant fait, on choisit $w_0 = \sigma^{-1}\left[-{}^{(1)}\lambda(v^\circ) - 2\,{}^{(1)}\varphi(v^\circ, w^\circ)\right]$.

Le coefficient de n dans $E(u_n)$ est alors inférieur à $-\frac{1}{2}\bar{K}(v^\circ) + \bar{K}(v^\circ) = \frac{1}{2}\bar{K}(v^\circ)$ donc est négatif, ce qui établit la proposition.

Remarque 4.3

1) On obtiendra une condition moins fine en remplaçant dans $\bar{K}(v^\circ)$ le terme $\mathcal{N}\left[{}^{(4)}\lambda(v^\circ)\right]$ par $\mathcal{N}\left[{}^{(2)}\lambda(v^\circ)\right]$ qui lui est supérieur. On obtiendra ainsi une condition moins fine mais plus facilement utilisable étant donnée la complexité de $\mathcal{N}\left[{}^{(4)}\lambda(v^\circ)\right]$

2) $\mathcal{N}\left[{}^{(4)}\lambda(v^\circ)\right]$ n'est pas une fonctionnelle quadratique. Cela provient du fait que ${}^{(4)}\lambda(v^\circ)$ est orthogonal à $B(v^\circ)$ qui dépend lui-même de v°. Toutefois, $\mathcal{N}\left[{}^{(4)}\lambda(v^\circ)\right]$ est homogène de degré deux : en effet, $B(\rho v^\circ) = B(v^\circ)$, et par conséquent, ${}^{(4)}\lambda(\rho v^\circ) = \rho\,{}^{(4)}\lambda(v^\circ)$.

3) $\mathcal{N}\left[{}^{(4)}\lambda(v^\circ)\right]$ est semi continue supérieurement dans $H^2(\Omega)$ faible. Soit en effet une suite $w_n \in W$ telle que ${}^{(2)}\varphi(v^\circ, w^\circ_n) \to {}^{(3)}\lambda(v^\circ)$. On a : $\mathcal{N}\left[{}^{(2)}\lambda(v^\circ) + {}^{(2)}\varphi(v^\circ, w^\circ_n)\right] \to \mathcal{N}\left[{}^{(4)}\lambda(v^\circ)\right]$ -

$\forall\,\varepsilon$, il existe donc $\bar{n}$ tel que :

$$\mathcal{N}\left[{}^{(2)}\lambda(v^\circ) + {}^{(2)}\varphi(v^\circ, w^\circ_{\bar{n}})\right] \leq \mathcal{N}\left[{}^{(4)}\lambda(v^\circ)\right] + \frac{\varepsilon}{2}$$

Par ailleurs : $\mathcal{N}\left[{}^{(4)}\lambda(u^\circ)\right] =$

$$\inf_{w \in W} \mathcal{N}\left[{}^{(2)}\lambda(u^\circ) + {}^{(2)}\varphi(u^\circ, w^\circ)\right] \leq \mathcal{N}\left[{}^{(2)}\lambda(u^\circ) + {}^{(2)}\varphi(u^\circ, w^\circ_{\bar{n}})\right]$$

Cette dernière expression est continue en u° dans $H^1(\Omega)$

Il existe donc η tel que

$$\|u^\circ - v^\circ\|_{H^1} < \eta \Rightarrow \mathcal{N}\left[{}^{(4)}\lambda(u^\circ)\right] \leq \mathcal{N}\left[{}^{(2)}\lambda(v^\circ) + {}^{(2)}\varphi(v^\circ, w^\circ_{\bar{n}})\right] + \frac{\varepsilon}{2} \leq \mathcal{N}\left[{}^{(4)}\lambda(v^\circ)\right] + \varepsilon$$

4) Nous ne savons pas si $\mathcal{M}\left[{}^{(4)}\lambda\,(v^\circ)\right]$ est semi continue inférieurement (donc continue) . S'il en était ainsi, la proposition 4.4 pourrait être grandement améliorée, en y remplaçant $K\,(v)$ par $\overline{K}\,(v)$, constituant ainsi avec la proposition 4.6 , "presque" une C N S .

Reprenant en effet le point 5 de la démonstration de la proposition 4.4, on pourrait le modifier ainsi :

$$\frac{A}{N} \geq \mathcal{M}\left[{}^{(2)}\lambda\,(v^\circ_n) + {}^{(2)}\varphi\,(v^\circ_n, N^{1/2}\, v^\circ_n)\right] + \mathcal{M}\left[\chi\,(v^\circ_n)\right] + \langle g_o\,,\, v_{on}\rangle + \frac{1}{N^{1/2}}\langle g^\circ\,,\, v^\circ_n\rangle$$

$$\geq \mathcal{M}\left[{}^{(4)}\lambda\,(v^\circ_n)\right] + \mathcal{M}\left[\chi\,(v^\circ_n)\right] + \langle g_o\,,\, v_{on}\rangle + \frac{1}{N^{1/2}}\langle g^\circ\,,\, v^\circ_n\rangle$$

Si donc $\mathcal{M}\left[{}^{(4)}\lambda\,(v^\circ)\right]$ était semi continue inférieurement dans $H^2(\Omega)$ faible, on obtiendrait par passage à la limite :

$$\overline{K}\,(v^\circ) \leq 0 \quad \text{au lieu de} \quad K\,(v^\circ) \leq 0$$

<u>Enoncé équivalent de la proposition 4.6</u>

Si $X = \left\{ v^\circ \mid v^\circ \in \mathcal{D}^{\circ *}\,,\ \langle g_o\,,\, v_o\,(v^\circ)\rangle = -a \right\}$ n'est pas vide

et si $a > \inf\limits_{v^\circ \in X} \overline{P}\,(v^\circ) \equiv \mathcal{M}\left[{}^{(4)}\lambda\,(v^\circ)\right] + \mathcal{M}\left[\chi\,(v^\circ)\right] + E^\circ_A\,(v^\circ)$

alors $E\,(u)$ n'est pas bornée inférieurement sur W

On démontre l'équivalence exactement comme on a fait pour la proposition 4.4 , en utilisant le fait que $\mathcal{M}\left[{}^{(4)}\lambda\,(v^\circ)\right]$ est homogène de

degré deux, et en remarquant que "$a > \inf \bar{P}(v^o)$" est équivalent à "$\exists\, v^o : \bar{P}(v^o) < a$", que $\bar{P}(v^o)$ atteigne ou non son minimum.

On établit également la proposition ci-dessous comme on a fait pour la proposition 4.5

Proposition 4.7

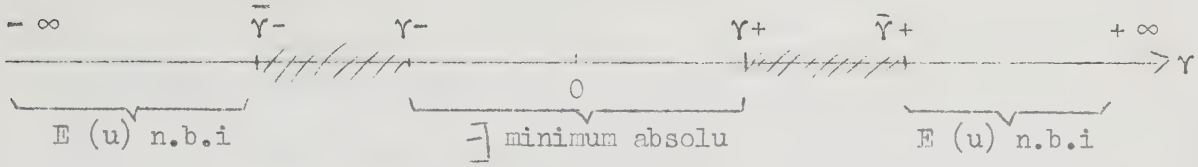
Sous l'action de charges tangentes proportionnelles au scalaire γ, $g_o = \gamma \bar{g}_o$, $E(u)$ n'est pas bornée inférieurement sur W si $\gamma < \bar{\gamma}-$ ou si $\gamma > \bar{\gamma}+$, avec :

$$0 > \gamma- \geqslant \bar{\gamma}- = \begin{cases} -\infty, & \text{si } X(1, \bar{g}_o) = \emptyset \\ -\inf\limits_{v^o \in X(1, \bar{g}_o)} \bar{P}(v^o), & \text{si } X(1, \bar{g}_o) \neq \emptyset \end{cases}$$

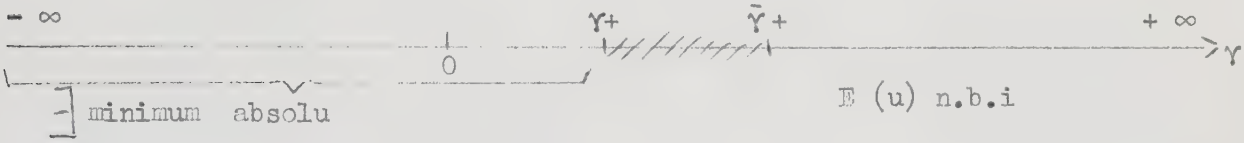
$$0 < \gamma+ \leqslant \bar{\gamma}+ = \begin{cases} +\infty, & \text{si } X(-1, \bar{g}_o) = \emptyset \\ \inf\limits_{v^o \in X(-1, \bar{g}_o)} \bar{P}(v^o) & \text{si } X(-1, \bar{g}_o) \neq \emptyset \end{cases}$$

Les résultats des propositions (4.5) et (4.7) sont récapitulés ci-dessous :

1 - $X(-1, \bar{g}_0) \neq \emptyset$, $X(1, \bar{g}_0) \neq \emptyset$



2 - $X(-1, \bar{g}_0) \neq \emptyset$, $X(1, \bar{g}_0) = \emptyset$



3 - $X(-1, \bar{g}_0) = \emptyset$, $X(1, \bar{g}_0) = \emptyset \iff \langle g_0 , v_0(v^\circ) \rangle = 0 \ \forall u^\circ \in \Phi^{\circ *}$

$E(u)$ atteint son minimum pour tout γ.

Remarque 4.4

Aucun résultat n'a été obtenu pour $\gamma \in \left[\gamma_\varepsilon , \bar{\gamma}_\varepsilon\right]$. Toutefois, cet intervalle est réduit à un point dans le cas d'une plaque , puisqu'alors $\lambda(v^\circ) = 0$, et on peut espérer qu'il est petit pour les coques de faible courbure.

4.- Etude des éléments de Φ - Critères simples d'existence de minimum absolu

Les propositions 4.4 et 4.6 sont d'un emploi pratique difficile, essentiellement du fait qu'il est difficile d'obtenir explicitement l'ensemble Φ.

On peut toutefois utiliser ces propositions pratiquement, même si on ne les exploite pas totalement . C'est ainsi par exemple, qu'il suffit de mettre en évidence l'existence d'un $v^\circ \in \Phi^{\circ *}$ tel que $\overline{K}(v^\circ) < 0$ pour pouvoir appliquer la proposition 4.6 .

Dans ce paragraphe, nous établissons certaines propriétés vérifiées

par tout élément de Φ , et nous les utilisons pour mettre en évidence une large classe de types de charges pour lesquels on a :

$< g_o, v_o (v^o) > \geq 0$, $\forall v^o \in \Phi^{o*}$, donc pour lesquels $E(u)$ atteint son minimum d'après la remarque 4.2 .

a) Nous établissons d'abord quelques résultats de régularité pour les éléments de Φ.

Lemme 4.2 :

Si u et v sont dans $H^1(\Omega)$, alors le produit $u\,v$ est dans $W^1_p(\Omega)$ pour tout $p \in]1, 2[$

Démonstration

Soient u et v appartenant à $H^1(\Omega)$

Point 1 - $u\,v$ est dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p > 1$ puisque u et v y sont d'après le théorème 1.3 et que l'on a d'après l'inégalité de Schwartz :

$$\int_\Omega |u\,v|^p \, dx \leq \int_\Omega |u|^{2p} \, dx \int_\Omega |v|^{2p} \, dx$$

Point 2 - Le produit $u\,v$, qui en tant que fonction sommable est une distribution sur Ω , vérifie la formule de Leibniz pour les dérivations distribution d'ordre un .

Par définition : $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(u\,v)\left[\varphi\right] = -\int_\Omega u\,v \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} \, dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Or , φ étant C^∞, le produit $v\,\varphi$ vérifie la formule de Leibniz. On a donc :

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(u\,v)\left[\varphi\right] = -\int_\Omega u \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(v\,\varphi)\, dx + \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x} \varphi \, dx$$

où les dérivées écrites sont des dérivées distribution , situées dans $L^2(\Omega)$ puisque v et $v\varphi$ sont dans $H^1(\Omega)$.

Les fonctions u et $v\varphi$ étant dans $H^1(\Omega)$, on peut intégrer par parties la première intégrale de la relation ci-dessus, et comme $v\varphi$ est nulle sur la frontière Γ de Ω, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(u\,v)\left[\varphi\right] = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x^\alpha}\, v\,\varphi\, dx + \int_\Omega u\,\frac{\partial v}{\partial x^\alpha}\,\varphi\, dx$$

d'où il résulte :

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(u\,v) = \frac{\partial u}{\partial x^\alpha}\, v + u\,\frac{\partial v}{\partial x^\alpha}$$

<u>Point 3</u> - Il reste à montrer que $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(u\,v)$ est dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p \in \left]1, 2\right[$. Appliquant l'inégalité de Holder avec les coefficients k et r $k > 1$, $r > 1$, $\frac{1}{k} + \frac{1}{r} = 1$, on a

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x^\alpha}\, v\right|^p dx \leqslant \left[\int_\Omega \left[\left|\frac{\partial u}{\partial x^\alpha}\right|^p\right]^k dx\right]^{1/k} \left[\int_\Omega \left[|v|^p\right]^r dx\right]^{1/r}$$

chaque fois que le second membre a un sens.

Prenant $k = \frac{2}{p}$ (> 1 puisque $p < 2$) et r en conséquence, ce second membre est alors égal à :

$$\left[\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x^\alpha}\right|^2 dx\right]^{p/2} \left[\int_\Omega |v|^{\frac{2p}{2-p}}\, dx\right]^{1-p/2}$$

expression qui a un sens puisque $\frac{\partial u}{\partial x^\alpha} \in L^2(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$ $\forall q > 1$.

Chacun des termes de $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(u\,v)$ étant dans $L^p(\Omega)$, $p \in \left]1, 2\right[$, le lemme est établi.

Proposition 4.8

Si les dérivées distribution d'ordre 1 des coefficients de Christoffel de la coque sont dans $L^2(\Omega)$ (par exemple : si les coefficients $a_{\alpha\beta}$ sont de classe C^1 sur $\bar{\Omega}$ et C^2 par morceaux) alors tout $v \in \mathcal{V}$ tel

que $\sigma(v_0) + \varphi(v^0) = 0$ est tel que $v_0 \in \left[W^2_p(\Omega)\right]^2$ pour tout $p \in \left]1, 2\right[$. Il en est en particulier ainsi pour les éléments de Φ.

Démonstration

Remarquons d'abord que v_0 étant dans $\left[H^1(\Omega)\right]^2$ est aussi dans $\left[W^1_p(\Omega)\right]^2$ pour tout $p \in \left]1, 2\right[$ puisque Ω est borné. Il suffit donc de montrer que $\dfrac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \in L^p(\Omega)$ $\forall\, p \in \left]1, 2\right[$, $\forall\, \alpha, \beta, \gamma = 1, 2$.

Puisque $u^0_{|\alpha} \in H^1(\Omega)$, il résulte du lemme 4.2 que $\varphi(u^0)$ est dans $\left[W^1_p(\Omega)\right]^4$ pour tout $p \in \left]1, 2\right[$, donc aussi $\sigma(v_0)$ qui lui est opposé. Donc, pour tout $p \in \left]1, 2\right[$

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\left[\sigma_{\alpha\beta}(v_0)\right] = \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\left[s_{\alpha\beta}(v_0)\right] - \left[\frac{\partial}{\partial x^\gamma} A^\delta_{\alpha\beta}\right] v_\delta - A^\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\delta}{\partial x^\gamma} \in L^p(\Omega)$$

où les coefficients $A^\delta_{\alpha\beta}$ sont les coefficients de Christoffel de la coque.

On a vu au point 3 de la démonstration du lemme 4.2, que

$$u \in L^2(\Omega), \quad v \in L^p(\Omega) \quad \forall\, p > 1 \implies u\,v \in L^q(\Omega) \quad \forall\, q \in \left]1, 2\right[$$

Appliquant cela aux deux derniers termes de la relation ci-dessus, on voit qu'ils appartiennent à $L^p(\Omega)$ $\forall\, p \in \left]1, 2\right[$.

On en déduit donc que $\dfrac{\partial}{\partial x^\gamma}\left[s_{\alpha\beta}(v_0)\right] \in L^p(\Omega)$ $\forall\, p \in \left]1, 2\right[$

Or, de la relation (1.10) il résulte que $\dfrac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}$ est une somme de termes de ce genre, donc appartient aussi à $L^p(\Omega)$ $\forall\, p \in \left]1, 2\right[$

Conséquences. Il résulte de la proposition 4.8, par application des théorèmes d'inclusion des espaces de Sobolev généralisant les théorèmes

(1.2) et (1.4) rappelés au chapitre 1 (C.F. par exemple [5] page 340) que pour tout $v \in \Phi$, les fonctions v_α sont p. p. égales à des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$, et que les fonctions $v_{\alpha|\beta}$, $\sigma_{\alpha\beta}(v_0)$ et $\varphi_{\alpha\beta}(v^0)$, qui sont dans $W_p^1(\Omega)$ pour tout $p \in]1,2[$ possèdent des traces parfaitement définies sur toute courbe $\mathcal{C} \subset \bar{\Omega}$ de classe C^1, traces appartenant par exemple à $L^2(\mathcal{C})$.

Nous supposons dans la suite de ce paragraphe que les conditions de la proposition 4.8 sont vérifiées.

b) <u>Nous avons vu</u> (chapitre II, paragraphe 5) que le terme $< g_0 , v_0 >_v$ de $E_p(v)$ est de la forme :

$$< g_0 , v_0 >_v = -\int_{\Omega^* \subset \Omega} \bar{F}^\alpha v_\alpha \, dx - \int_{\Gamma^* \subset \Gamma} \bar{\bar{F}}^\alpha v_\alpha \, d\sigma$$

Il suffit, pour que $< g_0 , v_0 >$ soit supérieur ou égal à zéro, que les fonctions à intégrer soient p.p. négatives ou nulles sur Ω^* et Γ^*. Ces fonctions à intégrer sont encore égales à $\vec{F}(M) . \vec{V}_0(M)$, où M est le point courant de $\bar{\Sigma}$, $\vec{V}_0(M) = v_\alpha \vec{a}^\alpha$, et où $\vec{F} = \bar{F}^\alpha \vec{a}_\alpha$ (respect. : $\bar{\bar{F}}^\alpha \vec{a}_\alpha$ est la composante tangente du champ de force appliqué par unité de surface de Ω (respect. : de longueur de Γ).

Nous dirons qu'un vecteur $\vec{U}$ du plan tangent en M à la coque (vecteur d'origine M pour fixer les idées) est un vecteur d'amarrage (V.A.) en M, si $\vec{U} . \vec{V}_0(M) \leq 0 \quad \forall v \in \Phi$. L'ensemble $A(M)$ des V.A. en M sera appelé secteur d'amarrage de M. Si tout vecteur $\vec{U}$ du plan tangent en M est V. A. en M, le point M sera dit bien amarré. La proposition ci-dessous traduit ce qui vient d'être dit :

Proposition 4.9

Si les composantes tangentes des champs de force de surface et de bord sont, en (presque) tout point de Σ et en (presque) tout point de la frontière de Σ, des vecteurs d'amarrage en ce point, alors $E(u)$ atteint son minimum absolu sur W.

c) Le problème maintenant posé est évidemment celui de l'étude de $A(M)$. La proposition ci-dessous regroupe quelques propriétés immédiates.

Proposition 4.10

1- $\vec{U} = \vec{0} \in A(M) \quad \forall M \quad ; \quad \vec{U} \in A(M) \Rightarrow k\vec{U} \in A(M) \quad \forall k \geq 0$

2- Si $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$ non parallèles sont dans $A(M)$, tout vecteur $\vec{U}$ appartenant à l'angle saillant formé par $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$ est dans $A(M)$

3- Si il existe trois V.A. non nuls partageant le plan tangent en M en trois secteurs saillants, le point M est bien amarré.

4- $A(M)$ est fermé en tout point M

5- Si un point M est bien amarré, $\vec{V}_0(M) = 0 \quad \forall v \in \Phi$

6- L'ensemble des points bien amarrés est fermé.

7- Si tous les points d'un domaine fermé connexe de $\bar{\Sigma}$, d'intérieur non vide, sont bien amarrés, v^o est constant dans ce domaine pour tout $v \in \Phi$.

Démonstration

Point 2 : $\vec{U} = \alpha_1 \vec{U}_1 + \alpha_2 \vec{U}_2$, avec $\alpha_i \geq 0$ pour tout vecteur du secteur

Point 4 : continuité du produit scalaire $\vec{U} \cdot \vec{V}_0(M)$

<u>Point 6</u> : continuité de $\vec{V}_0(M)$ pour tout $v \in \Phi$

<u>Point 7</u> : On a à l'intérieur du domaine : $\sigma_{\alpha\beta}(v_0) = 0$, qui entraîne $\varphi_{\alpha\beta}(v^0) = 0$, donc $v^0_{|\alpha} = 0$, c'est à dire $v^0 =$ cste . Par continuité (théorème 1.4) la relation reste vraie sur la frontière.

<u>Lemme 4.3</u>

Soit G une géodésique orientée de la surface moyenne, située sur $\bar{\Sigma}$, s son abscisse curviligne , $\vec{t}$ son vecteur unité . Soient A et B deux points quelconques de cette géodésique . Pour tout $v \in \Phi$ on a :

$$\vec{V}_0(B) \cdot \vec{t}(B) - \vec{V}_0(A) \cdot \vec{t}(A) = -\frac{\mu}{2} \int_{s_A}^{s_B} \left(\frac{d\,v^0}{ds}\right)^2 ds$$

<u>Démonstration</u>

Les équations $x^\alpha = x^\alpha(s)$ de cette géodésique, où s est l'abscisse curviligne, sont solutions du système :

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + A^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \quad t^\alpha_{|\beta}\, t^\beta = 0$$

où les t^α sont les composantes contravariantes du vecteur unité $\vec{t}$: $t^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$

Les coefficients $A^\gamma_{\alpha\beta}$ étant supposés continus sur $\bar{\Omega}$, les géodésiques sont de classe C^2 , et par conséquent, les traces sur G de $\sigma_{\alpha\beta}(v_0)$ et $\varphi_{\alpha\beta}(v^0)$ sont définies pour tout $v \in \Phi$, et vérifient la relation :

$$\sigma_{\alpha\beta}(v_0) = -\varphi_{\alpha\beta}(v^0)$$

Faisons le produit contracté de cette relation par $t^\alpha t^\beta$. Le premier membre s'écrit :

$$\sigma_{\alpha\beta}(v_0)\, t^\alpha t^\beta = \frac{1}{2}(v_{\alpha|\beta} + v_{\beta|\alpha})\, t^\alpha t^\beta = v_{\alpha|\beta}\, t^\alpha t^\beta$$

Soit encore, puisque $t^\alpha_{|\beta}\, t^\beta = 0$: $= (v_\alpha t^\alpha)_{|\beta}\, t^\beta = \frac{d}{ds}(\vec{V}_0 \cdot \vec{t})$

Le second membre n'est autre que : $-\frac{\mu}{2}\ v^{o}_{|\alpha}\ v^{o}_{|\beta}\ t^{\alpha}\, t^{\beta} = -\frac{\mu}{2}\left(\frac{d\,v^{o}}{d\,s}\right)^{2}$

On obtient la relation cherchée en intégrant sur G entre A et B .

Nous appellerons dans la suite "région d'ancrage" de la coque la fermeture de tout ouvert $\delta\Sigma^{*}$ de la frontière $\delta\Sigma$ de Σ tel que :

$$u_0 \in V_A \ \left(\text{c. a. d. : } (u_0\,,\,0) \in W\ ,\ E_{A_0}(u_0) = 0\right) \Rightarrow u_{\alpha|\delta\Sigma^{*}} = 0$$

En un point de $\delta\Sigma^{*}$ on aura donc $\vec{U}_0 = 0$, $\forall\, u_0 \in V_A$. Par continuité, on aura $\vec{V}_0 = 0$ pour tout $v \in \Phi$ et en tout point appartenant à une région d'ancrage : un tel point est donc bien amarré . Les régions d'ancrage sont essentiellement les régions où la coque est encastrée ou simplement supportée, éventuellement sur supports élastiques.

La proposition ci-dessous est conséquence immédiate du lemme 4 :

Proposition 4.11

$G\,(P\,,\vec{U})$ ($P \in \bar{\Sigma}$, $\vec{U}$ vecteur unité du plan tangent en P) désigne la portion de géodésique de la coque passant par P , tangente en P à $\vec{U}$, orientée par $\vec{U}$, et limitée aux points d'abscisse $s \geqslant s_p$.

1 - Si $\vec{U} \in A\,(P)$, en tout point M de $G\,(P\,,\vec{U})$ le vecteur tangent unité en M à $G\,(P\,,\vec{U})$ orientée appartient à $A\,(M)$

2 - Si P appartient à une région d'ancrage, ou plus généralement si P est bien amarré, pour tout $\vec{U}$ du plan tangent en P et pour tout $M \in G\,(P\,,\vec{U})$, le vecteur tangent unité en M à $G\,(P\,,\vec{U})$ orientée appartient à $A\,(M)$

3 - Si P et $\vec{U}_1$ sont tels que $G\,(P\,,\vec{U}_1)$ repasse en P avec un vecteur tangent unité $\vec{U}_2 \neq \vec{U}_1$, alors $\vec{U} = \vec{U}_2 - \vec{U}_1 \in A\,(P)$.

Démonstration

Il suffit de remarquer qu'en tout point $M \in G(P, \vec{U})$, on a en vertu du lemme 4.3 et pour tout $v \in \Phi$, et puisque $s_M \geq s_A$:

$$\overrightarrow{V_0}(M) \cdot \vec{t}(M) = \overrightarrow{V_0}(P) \cdot \vec{U} - \frac{\mu}{2} \int_{s_P}^{s_M} \left(\frac{dv^o}{ds}\right)^2 ds \leq \overrightarrow{V_0}(A) \cdot \vec{U}$$

Dans les points 1 et 2, le membre de droite est respectivement négatif ou nul et nul. On en déduit donc $\overrightarrow{V_0}(M) \cdot \vec{t}(M) \leq 0$.

Dans le point 3 on en déduit : $\overrightarrow{V_0}(P) \cdot \vec{U}_2 \leq \overrightarrow{V_0}(P) \cdot \vec{U}_1$, qui entraîne : $\overrightarrow{V_0}(P) \cdot (\vec{U}_2 - \vec{U}_1) \leq 0$.

L'hypothèse du point 3 est réalisée par exemple dans le cas d'une coque conique. Le vecteur $\vec{U}_2 - \vec{U}_1$ est alors porté par la génératrice de P et dirigé vers la base du cône.

Si la coque est suffisamment régulière, ce que nous supposons, la théorie des systèmes d'équations différentielles, appliquée aux équations des géodésiques, montre que les propriétés suivantes sont réalisées :

P 1 - Pour tout $M \in \Sigma$ et tout $\vec{U}$ tangent en M à Σ, il existe une et une seule géodésique passant par M et tangente à $\vec{U}$ en M.

P 2 - Si G est une géodésique joignant P et $Q \in \Sigma$, située sur Σ, pour tout couple de voisinages de P et de Q dans Σ et pour tout point M de G, il existe une géodésique G' différente de la précédente, joignant un point du voisinage de P à un point du voisinage de Q, et passant par M.

P 3 - Le résultat précédent subsiste si on remplace :

a) Un des points P et Q, ou les deux, par un point de $\delta\Sigma$, en considérant un voisinage de ce point sur $\delta\Sigma$, à la condition toutefois que G ne

soit pas tangente en ce point à $\delta\Sigma$, et que G n'ait pas d'autres points appartenant à $\delta\Sigma$

b) Le voisinage de P dans Σ, par exemple, par un voisinage de P sur une courbe C^1 passant par P et non tangente en ce point à G.

Dans la suite, $G(P, Q)$ désigne une géodésique joignant deux points P et Q, située sur Σ, sauf éventuellement ses extrémités P et Q. Si P ou Q est sur $\delta\Sigma$, on suppose que $G(P,Q)$ n'est pas tangente à $\delta\Sigma$ en ce point (11).

Soient E_Σ un ensemble de points de Σ, E_δ un ensemble de points de $\delta\Sigma$ et $E = E_\Sigma \cup E_\delta$. On désigne par $C(E)$ l'ensemble des points de $\overline{\Sigma}$ obtenu en adjoignant à E successivement tout point appartenant à une géodésique du type $G(P, Q)$ où P et Q sont des points intérieurs à E_Σ ou à E_δ, puis tout point appartenant à une géodésique du type $G(P, Q)$ où P et Q sont soit du type précédent, soit des points déjà adjoints à E.

Proposition 4.12

Si E est un ensemble de points bien amarrés, la fermeture de $C(E)$ est aussi un ensemble de points bien amarrés.

Démonstration

Soit d'abord $M \in G(P, Q)$, avec P et Q intérieurs à E_Σ ou E_δ. Il existe des voisinages de P et de Q, dans Σ ou $\delta\Sigma$, inclus dans E_Σ ou E_δ.

(11) - Si P est un point anguleux de la frontière, on impose en outre aux géodésiques $G(P, Q)$ d'être telles que la frontière $\delta\Sigma$ soit, au voisinage de P, de part et d'autre du support de la tangente en P à $G(P, Q)$.

Il existe une seconde géodésique passant par M et joignant deux points appartenant à ces voisinages, c'est à dire deux points bien amarrés.

On a donc en M quatre vecteurs tangents $\vec{U}_1$; $\vec{U}_2$, $\vec{U}_3 = -\vec{U}_1$; $\vec{U}_4 = -\vec{U}_2$ tels que $G(M, \vec{U}_i)$ aboutissent à des points bien amarrés. Les $\vec{U}_i$ sont donc dans $A(M)$. Les $\vec{U}_i$ partageant le plan tangent en M en secteurs saillants, M est bien amarré.

Soit ensuite $M \in G(P, Q)$ où P est par exemple du type précédent et où Q est un point déjà adjoint. Le point Q est situé sur une géodésique G' constituée de points bien amarrés. $G(P, Q)$ n'est pas tangente en Q à G' sous peine de se confondre avec G'. On peut alors reprendre la démonstration précédente en considérant cette fois un voisinage de Q sur G'.

Tout point de $C(P)$ est donc bien amarré, donc aussi tout point de sa fermeture.

Proposition 4.13

Si par tout point de Σ passe au moins deux géodésiques joignant chacune deux points situés sur $\delta\Sigma$, et si toute la frontière est zone d'ancrage, alors tout point de $\bar{\Sigma}$ est bien amarré. Plus précisément, l'ensemble $\mathcal{Q}^*$ (ou $\mathcal{Q}^{2*}$) est vide.

Cette proposition est conséquence immédiate de la précédente. Remarquons que la première hypothèse est réalisée pour des coques planes, cylindriques, coniques, sphériques (si "petite" que soit la frontière dans ce cas), etc... Il ne nous a en fait pas été possible de trouver un contre exemple où cette hypothèse ne soit pas vérifiée.

d) Quelques remarques et exemples -

1 - S'il existe une géodésique fermée sur $\bar{\Sigma}$, G , alors v° est constant sur cette géodésique, pour tout v dans Φ . On a en effet, en vertu du lemme 4.3 : $\vec{V}(M) \cdot \vec{t}(M) = \vec{V}(M) \cdot \vec{t}(M) + \frac{\mu}{2} \int_G \left(\frac{d v^\circ}{d s}\right)^2 d s$, où $\vec{t}(M)$ est le vecteur unité tangent en M à G , et par suite $\frac{d v^\circ}{d s} = 0$ sur G .

2 - La figure 4.2 ci-dessous représente un exemple de coque simple dévelopable. On y voit en différents points des secteurs qui font partie du secteur d'amarrage en ce point . On remarque en particulier que tout point M du domaine fermé limité par $\widehat{AB}$ (arc frontière) , $\overline{BC}$ (géodésique B C) , $\widehat{CD}$, $\overline{DE}$, $\widehat{EF}$, $\overline{FG}$, $\widehat{GH}$, $\overline{HI}$, $\widehat{IJ}$, $\overline{JA}$, est bien amarré.

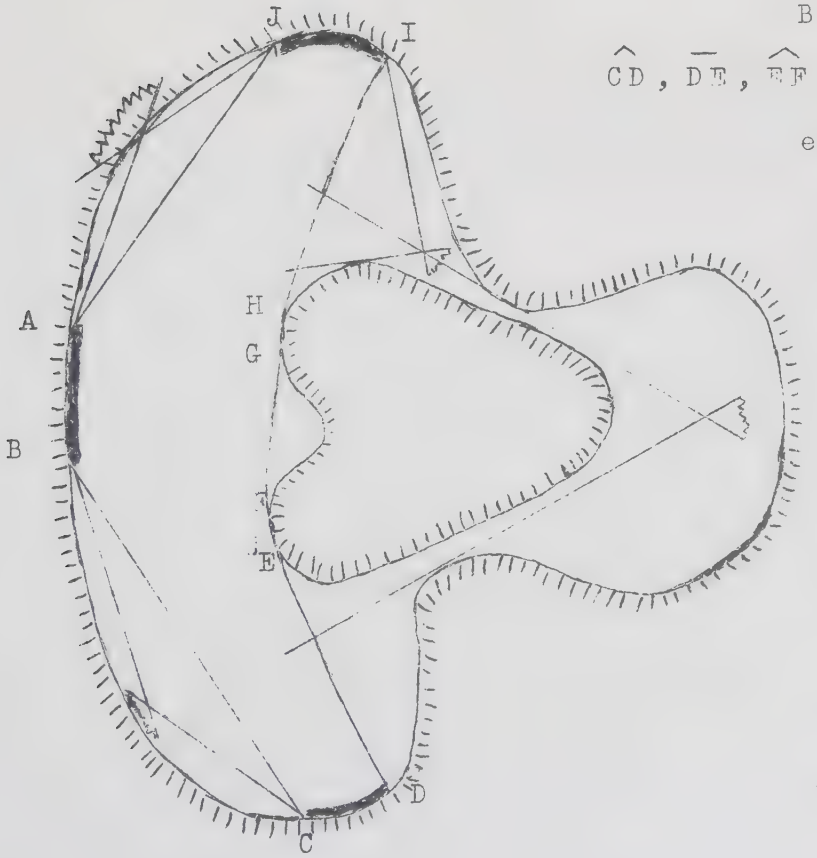


Fig. 4.2

frontière

zone d'ancrage

secteur d'amarrage

3 - Il peut évidemment exister d'autres éléments de $A(M)$ que ceux mis en évidence dans ce qui précède. A titre d'exemple, considérons une plaque rectangulaire dont, entre autres, un côté est astreint à se déplacer dans une rainure rectiligne. Ce côté n'est pas une zone d'ancrage au sens défini précédemment. Toutefois, pour tout $U \in W$, $\vec{U}_0$ est parallèle à la rainure en tout point M du côté. Par suite, le vecteur normal à la rainure en ce point est dans $A(M)$.

4 - Si la charge $\overline{g}$ est telle que $\overline{g}_0$ vérifie les conditions de la proposition 4.9, toute charge telle que $g_0 = \gamma \overline{g}_0$, $\gamma \geqslant 0$, vérifie aussi les conditions de la proposition 4.9. On a donc, dans ce cas :

$$\gamma_+ = +\infty \quad \text{et} \quad \overline{\gamma}_+ = +\infty$$

5 - On verra au sous chapitre suivant, sur un exemple, comment adapter la proposition 4.9 au cas où les forces de bord ne sont pas définies en tout point.

SOUS CHAPITRE B : APPLICATION A QUELQUES EXEMPLES DE COQUES CYLINDRIQUES (MACHINE A TESTER)

Il est certain que l'application des propositions 4.4 ... 4.7, lorsque l'on n'est pas dans le cadre de la remarque 4.2 ayant conduit aux développements du paragraphe A-4, pose de sérieux problèmes techniques, en particulier pour déterminer les valeurs γ_-, $\bar{\gamma}_-$, γ_+, $\bar{\gamma}_+$.

Nous considérons dans ce sous chapitre l'exemple relativement simple de la machine à tester de type poids mort introduit au Chapitre II. Nous avons vu au chapitre III que les conditions sont remplies pour qu'il y ait existence et unicité de la solution du problème linéaire. Nous supposons ici pour simplifier que les forces de surface tangentes sont nulles, ainsi que les forces de torsion exercées sur S_2 $(M = 0)$. On aura donc :

$$< g_0 , v_0 >_V = F\, u_{1|\Gamma_2}$$

où F est la résultante (réduite) de la force de compression algébrique exercée sur l'élément de coque cylindrique, et où $u_{1|\Gamma_2}$ est la valeur constante prise sur Γ_2 par $u \in W$.

Dans une première partie, nous mettons en évidence quelques situations pour lesquelles les résultats du paragraphe A-4 s'appliquent. Nous envisageons ensuite des cas où ces résultats ne s'appliquent pas.

1.- Application des résultats de A-4.

On remarque d'abord que :

$$u \in W \quad \text{et} \quad E_{A_0}(u_0) = \frac{K}{2}\left(u_{1|\Gamma_1}\right)^2 = 0 \qquad \Rightarrow \quad u_{1|\Gamma_1} = 0 \;,\; u_{2|\Gamma_1} = 0$$

$\bar{\Gamma}_1$ est donc une région d'ancrage de la coque, et c'est la seule.

On est ici dans un cas où les forces de bord ne sont pas totalement connues, ou plutôt, le solide S_2 étant dans le système étudié, dans un cas de forces extérieures non appliquées à la coque elle-même . On peut néanmoins utiliser les résultats précédents : remarquant que

$$< g_0 , u_0 > = (\vec{U}_0 . F \vec{a}_1) (P)$$

où P est un point quelconque de Γ_2 et $\vec{a}_1$ le vecteur normal en ce point à Γ_2 , on constate que la proposition 4-9 assurant l'existence d'un minimum absolu reste ici vérifiée sous la simple condition qu'il existe au moins un point $P \in \Gamma_2$ tel que le vecteur $- F \vec{a}_1 (P)$ soit dans $A (P)$.

Les figures 4-3 , 4-4 , 4-5 , mettent en évidence des configurations de Σ pour lesquelles cette condition est réalisée lorsque F est négatif ou nul , c'est à dire lorsque la machine travaille en traction (on utilise la proposition 4-11 points 1 et 2 et les géodésiques tracées sur les figures).

Dans le cas de la figure 4-6 , il n'est plus possible de réaliser la condition précédente . On voit toutefois qu'il existe deux géodésiques joignant la région d'ancrage Γ_1 à deux points P_1 et P_2 de Γ_2 , dont les vecteurs unité tangents $\vec{t}^1$ et $\vec{t}^2$ en P_1 et P_2 sont par conséquent dans $A (P_1)$ et $A (P_2)$, et de plus tels que :

$$(4.15) \qquad \vec{t}^{\alpha} = \sum_{\beta} k^{\alpha\beta} \vec{a}_{\beta} (P_{\alpha}) \quad , \quad \text{avec} \quad k^{11} > 0 \ , \ k^{12} > 0 \ , \ k^{21} > 0 \ , \ k^{22} < 0$$

Nous allons montrer que cela suffit pour assurer l'existence d'un minimum absolu, toujours dans le cas de la traction : $F \leq 0$.

$$\forall u \in W : \vec{a}_{\beta} (P_1) . \vec{U}_0 (P_1) = u_{\beta} (P_1) = u_{\beta|\Gamma_2} = u_{\beta} (P_2) = \vec{a}_{\beta} (P_2) . \vec{U}_0 (P_2)$$

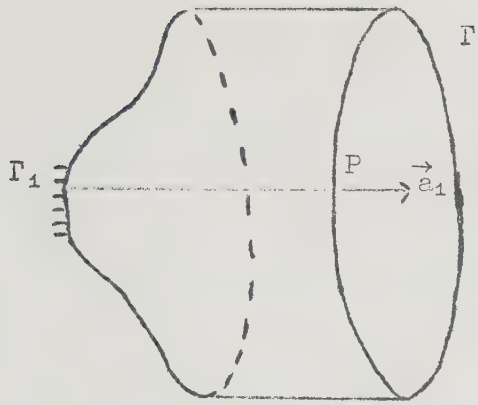


Fig. 4-3

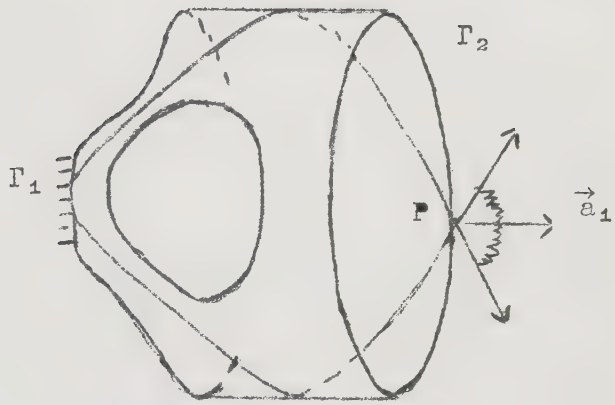


Fig. 4-4

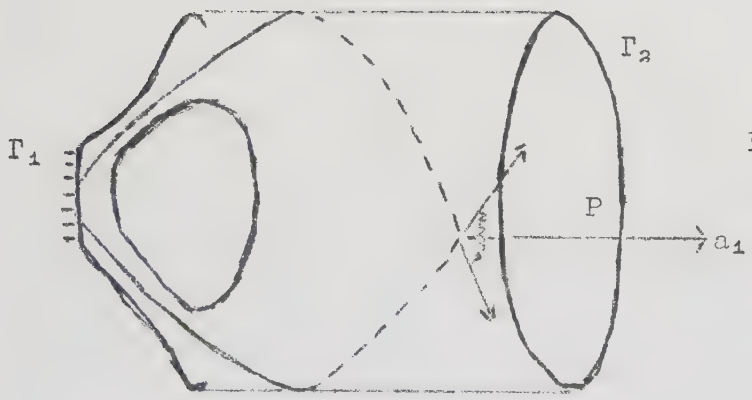


Fig. 4-5

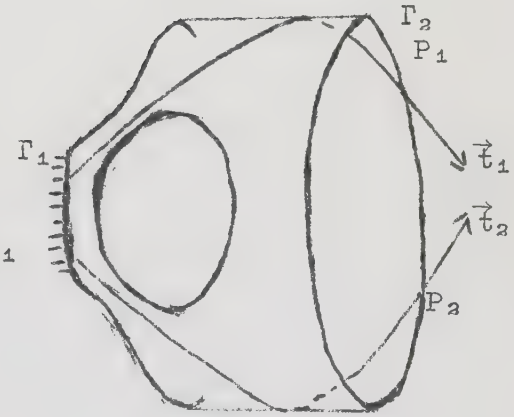


Fig. 4-6

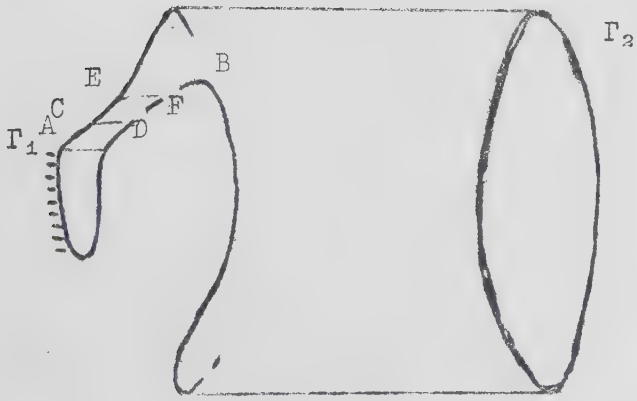


Fig. 4-7

Frontière

région d'ancrage

Les relations : $(\vec{U}_0 \cdot \vec{t}^{\alpha})(P_\alpha) = \sum_\beta k^{\alpha\beta} \vec{a}_\beta(P_\alpha) \cdot \vec{U}_0(P_\alpha)$ déduites de (4.15) constituent donc un système en $u_{1|\Gamma_2}$ et $u_{2|\Gamma_2}$ dont la résolution donne :

$$u_{1|\Gamma_2} = \sum_\mu k^\mu \vec{U}_0(P_\mu) \cdot \vec{t}^{\mu} \quad , \quad \text{avec} \quad k^1 = \frac{-k^{22}}{k^{12}k^{21} - k^{11}k^{22}} > 0$$

$$\text{et} \qquad k^2 = \frac{k^{12}}{k^{12}k^{21} - k^{11}k^{22}} > 0$$

On a donc : $< g_0 , v_0 > = F \sum_\mu k^\mu \vec{V}_0(P_\mu) . \vec{t}^{\mu} \geq 0 \quad \forall v \in \Phi$

puisque $\vec{t}^{\mu} \in A(P_\mu)$ et puisque F est négatif . Le résultat est établi.

Dans ce qui précède, la proposition 4-9 , modifiée comme il a été dit, ne nous a permis de conclure que si la géométrie de la coque est , disons, convenable, et si la machine travaille en traction. Nous allons envisager dans la suite de ce sous chapitre différents exemples où une de ces conditions n'est pas réalisée, et montrer que l'on n'est plus alors dans le cadre de la remarque 4.2 et des résultats de A-4 .

La charge tangente g_0 étant de la forme $g_0 = \gamma \bar{g}_0$, avec $\gamma = F$ et $\bar{g}_0$ correspondant à une charge $F = 1$, nous serons alors amené à évaluer des valeurs limites $F-$, $\bar{F}-$, $F+$, $\bar{F}+$, suivant les notations des propositions 4.5 et 4.7 . Nous ne mènerons que des calculs se faisant à la main. Nous serons ainsi contraint de particulariser progressivement les exemples (coques homogènes, etc...) et nous n'atteindrons souvent que des valeurs approchées des coefficients $F-$, etc ....

2.- Exemple 1 : Traction - géométrie de Σ "non convenable"

Nous envisageons une coque ayant la forme représentée figure 4.7 , reproduite en partie figure 4.8 .

a) Les résultats de A-4 ne s'appliquent pas :

La génératrice de A n'aboutit pas sur Γ_2 (par hypothèse), donc atteint Γ_3 en un point situé dessous B .

Il existe donc une bande de coque, limitée par deux segments d'hélices parallèles, C D et E F , faisant un angle α avec les génératrices, et par deux parties C E et DF de Γ_3 , sur lesquelles aucune condition n'est imposée aux éléments :

$v \in W$, $E_{A_0}(v_0) = 0$

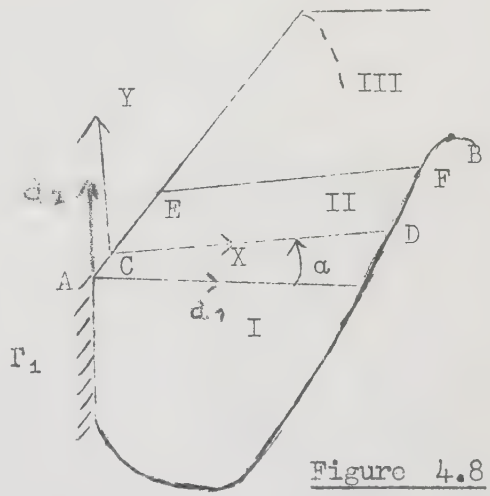


Figure 4.8

Cette bande délimite trois régions, I , II , III , sur la coque.

Prenant le point C pour origine d'une carte locale représentant un voisinage de cette bande, on pose dans cette carte locale :

$$X = x^1 \cos\alpha + x^2 \sin\alpha \qquad \vec{X} = \vec{a}_1 \cos\alpha + \vec{a}_2 \sin\alpha$$

$$Y = -x^1 \sin\alpha + x^2 \cos\alpha \qquad \vec{Y} = -\vec{a}_1 \sin\alpha + \vec{a}_2 \cos\alpha$$

Le segment C D (respec^t : E F) a pour équation : $Y = 0$ (resp^t : $Y = b$, $b > 0$)

Considérons l'ensemble Φ_d des fonctions $v = (v_1 , v_2 , v^0)$ définies sur Σ par :

$$v^0 = \begin{cases} 0 & \text{sur I et III} \\ f\left(\frac{Y}{b}\right) & \text{sur II} \end{cases} \qquad \vec{V}_0 = v_\alpha \vec{a}^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{sur I} \\ -\frac{\mu}{2b^2}\vec{Y}\int_0^Y \left[f'\left(\frac{y}{b}\right)\right]^2 dy & \text{sur II} \\ -\frac{\mu}{2b^2}\vec{Y}\int_0^b \left[f'\left(\frac{y}{b}\right)\right]^2 dy & \text{sur III} \end{cases}$$

$f \in H_0^2(0 , 1)$

(plus précisément, dans III, les fonctions v_α sont les constantes définies ci-dessus dans le domaine de la carte).

On constate que tout $v \in \Phi_d$ est dans $\mathcal{V}$, vérifie les conditions aux limites définissant W, est nul sur Γ_1 donc tel que $E_{A_0}(v_0) = 0$, et vérifie de plus la relation $\sigma(v_0) + \varphi(v^0) = 0$. On a donc : $\Phi_d \subset \Phi$.

Or, pour $v \in \Phi_d$, $v_1|_{\Gamma_2}$ est égal à la valeur constante de v_1 dans III, c'est à dire est égal à :

$$\frac{\mu \sin \alpha}{2\, b^2} \int_0^b \left[f'\left(\frac{y}{b}\right)\right]^2 dy$$, quantité strictement positive pourvu que f ne soit pas nulle.

On a donc, pour $F < 0$: $< g_0 , v_0 >_v = F\, v_1|_{\Gamma_2} < 0$. Nous ne sommes pas dans le cadre de la remarque 4.2, et les résultats de A.4 ne sont pas applicables. En d'autres termes, $X(1, \bar{g}_0)$ n'est pas vide, et par conséquent (propositions 4.5 et 4.7), il existe $F-$ et $\bar{F}-$, avec :

$0 > F- \geqslant \bar{F}- > -\infty$, tels que $E(u)$ atteigne son minimum pour $F \in]F, 0]$ et ne soit pas bornée inférieurement pour $F \in]-\infty, \bar{F}-[$

Les valeurs $F-$ et $\bar{F}-$ sont définies dans les propositions 4.5 et 4.7 comme opposées de minimum de fonctionnelles sur $X(1, \bar{g}_0)$. On obtiendra des valeurs approchées par défaut, soit $(F-)_d \leqslant F-$ et $(\bar{F}-)_d \leqslant \bar{F}-$, en minimisant ces fonctionnelles sur le sous ensemble X_d de $X(1, \bar{g}_0)$ correspondant à $\Phi_d \subset \Phi$, c'est à dire finalement sur un sous ensemble de $H_0^2(0,1)$

<u>Dans toute la suite</u> de cet exemple, nous supposerons la coque homogène. Soient $\tilde{R}$ le rayon, $\tilde{h}$ l'épaisseur, $\tilde{E}$ le module d'Young et ν le coefficient de Poisson (constants). On choisit (C H II - paragraphe 2.b) :

$L = \tilde{R}$, $\mu = \frac{\tilde{R}}{\tilde{h}}$, $E_o = \tilde{E}$, ce qui entraîne :

$E(x) = 1$, $h(x) = 1$, et

$$(1-\nu^2)\mathcal{N}(y) = 12\,(1-\nu^2)\mathcal{M}(y) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[(y_{11}+y_{22})^2 + 2(1-\nu)(y_{12}^2 - y_{11}\,y_{22})\right] dx$$

b) <u>Calcul de $(F_-)_d$</u>

1°) On a ici $E_A^o = 0$, et pour $v \in \Phi_d$:

$$\chi_{11}(v) = \frac{1}{b^2}\sin^2\alpha\, f''\left(\frac{Y}{b}\right) \;;\quad \chi_{12}(v) = -\frac{1}{b^2} f''\left(\frac{Y}{b}\right)\sin\alpha\cos\alpha \;;$$

$$\chi_{22}(v) = \frac{1}{b^2} f''\left(\frac{Y}{b}\right)\cos^2\alpha$$

en un point de II , ces quantités étant nulles sur I et III . On en déduit :

$$P(v^o) = \mathcal{M}\left[\chi(v^o)\right] = \frac{1}{24\,(1-\nu^2)\,b^4}\int_{II}\left[f''\left(\frac{Y}{b}\right)\right]^2 dx \quad , \quad \forall\, v \in \Phi_d .$$

Par ailleurs : $X_d = \left\{ v^o \mid v^o \in \Phi_d^o \,,\ \frac{\mu \sin\alpha}{2\,b}\int_0^1 \left[f'(z)\right]^2 dz = 1 \right\}$

On en déduit :

$$\boxed{\begin{aligned}(F_-)_d &= -\inf_{v^o \in X_d} P(v^o) \\ &= \frac{-1}{12\,\mu\,(1-\nu^2)\,b^3\sin\alpha}\ \inf_{f \in H_0^2(0,1)\,,\ \int_0^1 [f'(z)]^2 dz = 1} \int_{II}\left[f''\left(\frac{Y}{b}\right)^2\right] dx\end{aligned}}$$

2°) Soient $X = g_1(Y)$ et $X = g_2(Y)$ les équations des parties CE et DF de Γ_3 , soit $\ell(Y) = g_2(Y) - g_1(Y)$ la largeur de la bande pour l'ordonnée Y , et soit ℓ_M le maximum de $\ell(Y)$ sur $(0, b)$. On a :

$$\int_{II}\left[f''\left(\frac{Y}{b}\right)\right]^2 dx = \int_0^b \ell(Y)\left[f''\left(\frac{Y}{b}\right)\right]^2 dY \leqslant \ell_M\, b\int_0^1 \left[f''(z)\right]^2 dz$$

Utilisant cette inégalité dans le calcul de $(F-)d$, on obtient une autre valeur, $(F-)d\,d$, approchée par défaut de $(F-)d$, donc de $F-$:

$$(F-)d\,d = \frac{-\ \ell_M}{12\ \mu\ (1-\nu^2)\ b^2 \sin\alpha}\ k \quad \text{avec} \quad k = \inf_{f \in H_0^2,\ \|f'\|_0 = 1} \int_0^1 \left[f''(z)\right]^2 dz$$

3°) Calcul de k - On vérifie classiquement que si $\bar{f}$ réalise le minimum définissant k, alors $\bar{f}$ est solution de l'équation : $f^{IV} + k\,f'' = 0$, et que k est la plus petite valeur (propre) positive telle que cette équation ait une solution non nulle dans H_0^2 . Un calcul élémentaire montre alors que $k = 4\,\pi^2$.

4°) Les valeurs approchées ci-dessus dépendent dans une large mesure du choix de la bande CDEF. A toute bande correspond une valeur approchée par défaut $(F-)d$ ou $(F-)d\,d$. On aura donc intérêt à choisir la bande de telle façon que ces valeurs soient les plus grandes possibles. Ainsi, pour $(F-)d\,d$, on aura intérêt à choisir la bande de telle façon que le terme $\dfrac{\ell_M}{b^2 \sin\alpha}$ soit le plus petit possible.

5°) Cas où l'appendice de Σ où sont choisies les bandes CDEF est limité latéralement par deux hélices parallèles (figure 4.9).

On a alors pour toute bande : $\ell(Y) = \text{cste} = \ell(\alpha)$. Par conséquent :

$$(F-)d = (F-)d\,d = -\ \frac{\ell(\alpha)}{b^2 \sin\alpha}\ \frac{4\,\pi^2}{12\ \mu\ (1-\nu^2)}$$

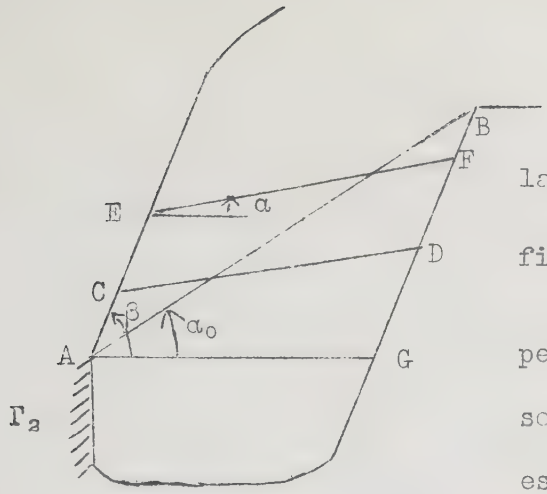


Fig. 4.9

En vue d'optimiser $(F-)d$ en fonction de la bande C D E F, on remarque que pour un α fixé, le coefficient $\frac{\ell(\alpha)}{\bar{b}^2 \sin\alpha}$ sera le plus petit en prenant pour b la valeur maximum, soit $\bar{b}(\alpha)$, qui correspond au cas où C est en A et F en B.

On obtient donc la valeur optimum pour $(F-)d$:

$$(F-)\,d_{opt.} = -\left[\inf_{\alpha \in (0,\alpha_0)} \frac{\ell(\alpha)}{\bar{b}^2(\alpha)\sin\alpha}\right] \frac{\pi^2}{3\mu(1-\nu^2)}$$

Un calcul immédiat de $\ell(\alpha)$ et $\bar{b}(\alpha)$ en fonction de α, des angles α_0, β et de $AG = a$, qui caractérisent la géométrie de l'appendice, montre que :

$$\boxed{(F-)\,d_{opt} = -\frac{\pi^2}{3\mu(1-\nu^2)} \cdot \frac{\sin^2(\beta-\alpha_0)}{a\sin\beta} \cdot \frac{1}{\sup\limits_{\alpha \in (0,\alpha_0)} \left[\sin\alpha\,\sin(\beta-\alpha)\sin^2(\alpha_0-\alpha)\right]}}$$

On remarque que $\sin\alpha \sin(\beta-\alpha) \sin(\alpha_0-\alpha)$ s'annule pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \alpha_0$ et est positif pour $\alpha \in]0, \alpha_0[$. Le maximum est donc atteint sur $]\alpha_0, 0[$

<u>Remarque</u> l'ordre de grandeur de $(F-)d$ est $\frac{1}{\mu}$, c'est à dire $\frac{\tilde{h}}{\tilde{R}}$.

A titre de comparaison, la charge critique d'Euler pour un cylindre, est avec nos notations : $F_{cr} = \frac{2\pi}{\left[3(1-\nu^2)\right]^{1/2}}$. C'est dire que les valeurs obtenues pour $(F-)d$ sont très faibles pour les coques minces.

c) Calcul de $(\overline{F}-)d$

1) Un calcul complet de $(\overline{F}-)d$ est particulièrement difficile du fait de la nécessité de déterminer ${}^{(4)}\lambda\,(v^o)$, ou tout au moins $\mathcal{N}\,({}^{(4)}\lambda\,(v^o))$. Nous nous bornerons ici à déterminer une valeur approchée par défaut, $(\overline{F}-)d\,d$, de $(\overline{F}-)d$ donc de $\overline{F}-$, en remplaçant dans :

$$(\overline{F}-)d = -\inf_{v^o \in X_d} \overline{P}\,(v^o) = \mathcal{N}\left[{}^{(4)}\lambda\,(v^o)\right] + \mathcal{M}\left[\chi\,(v^o)\right]$$

$\mathcal{N}\left[{}^{(4)}\lambda\,(v^o)\right]$ par $\mathcal{N}\left[{}^{(2)}\lambda\,(v^o)\right]$ qui lui est supérieur ou égal,

puis $$\mathcal{N}\left[{}^{(2)}\lambda\,(v^o)\right] = \inf_{u_o \in V_A} \mathcal{N}\left[\sigma\,(u_o) + \lambda\,(v^o)\right]$$

par une quantité notée $\mathcal{N}_d\left[{}^{(2)}\lambda\,(v^o)\right]$, plus grande, obtenue en minimisant le second membre ci-dessus sur un ensemble V_{Ad} plus petit que V_A .

2) Choix de V_{Ad} - Lorsque $v^o \in X_d$, $\lambda\,(v^o)$ ne dépend que de Y dans la région II ; il semble donc naturel d'astreindre les éléments de V_{Ad} de ne dépendre aussi que de Y dans II. L'ensemble V_{Ad} étant ainsi défini, u_1 et u_2 seront constants sur CD et EF, pour tout $u_o \in V_{Ad}$. Par ailleurs, et puisque v^o est nul sur I et III, on a :

$$(4.16)\quad \mathcal{N}_d\left[{}^{(2)}\lambda\,(v^o)\right] = \inf_{u_o \in V_{Ad}} \left\{\mathcal{N}_{I+III}\left[\sigma\,(u_o)\right] + \mathcal{N}_{II}\left[\sigma\,(u_o) + \lambda\,(v^o)\right]\right\}$$

$$\geq \inf_{u_o \in V_{Ad}} \mathcal{N}_{II}\left[\sigma\,(u_o) + \lambda\,(v^o)\right]$$

où $\mathcal{N}_{II}$ est la réduction à II de l'intégrale sur Ω définissant $\mathcal{N}$, etc...

Soit $\bar{u}_0$ la restriction à II d'une fonction de V_{Ad} réalisant le minimum de $\mathcal{M}_{II}\left(\sigma(u_0) + \varphi(v^0)\right)$. Considérons la fonction $\bar{\bar{u}}_0$ définie par $\bar{\bar{u}}_0 = 0$ sur I , $\bar{u}_0 - \bar{u}_{0|CD}$ sur II , $\bar{u}_{0|EF} - \bar{u}_{0|CD}$ sur III

Cette fonction est dans V_{Ad} : en particulier, elle ne dépend que de Y sur II , elle est nulle sur Γ_1 , donc telle que $F_{A_0}(u_0) = 0$, et $\bar{\bar{u}}_1$ et $\bar{\bar{u}}_2$ sont constants sur III donc sur Γ_2 . Or, elle est telle que :

$$\mathcal{M}_{I+III}\left[\sigma(\bar{\bar{u}}_0)\right] = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{M}_{II}\left[\sigma(\bar{\bar{u}}_0) + \lambda(v^0)\right] = \mathcal{M}_{II}\left[\sigma(\bar{u}_0) + \lambda(v^0)\right]$$

On en déduit donc que $\mathcal{M}_d\left[{}^{(2)}\lambda(v^0)\right]$ est plus petit que (donc égal à d'après 4.16) :

$$\inf_{u_0 \in V_{Ad}} \mathcal{M}_{II}\left[\sigma(u_0) + \varphi(v^0)\right] \text{ , et aussi que}$$

$$\inf_{u_0 \in V_{Ad}} \mathcal{M}_{II} = \inf_{u_0 \in V_{Ad}\,,\ u_0 = 0 \text{ sur } CD} \mathcal{M}_{II}$$

On a donc finalement :

$$\mathcal{M}_d\left[{}^{(2)}\lambda(v^0)\right] = \inf_{u_0 \in V_{Ad}\,,\ u_{0|CD} = 0} \mathcal{M}_{II}\left[\sigma(u_0) + \lambda(v^0)\right]$$

3) <u>Calcul de $\mathcal{M}_d$</u>

Les réductions à II des éléments $u_0 \in V_{Ad}$ nuls sur CD sont de la forme :

$$\vec{U}_0 = g(Y)\,\vec{X} + h(Y)\,\vec{Y} \text{ , avec } g(Y) \text{ et } h(Y) \in H^1(0, b) \text{ et}$$
$$g(0) = h(0) = 0$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \sigma_{11}(u_0) = -g' \sin\alpha \cos\alpha + h' \sin^2\alpha \\ \sigma_{12} = \sigma_{22} = \dfrac{g'}{2}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - h' \sin\alpha \cos\alpha \\ \sigma_{22} = g' \sin\alpha \cos\alpha + h' \cos^2\alpha \end{cases}$$

Comme par ailleurs : $\lambda_{11}(v^o) = \lambda_{12} = \lambda_{21} = 0$ et $\lambda_{22} = -\mu f(\frac{Y}{b})$,

il vient après quelques calculs :

$$\mathcal{M}_{II}\left[\sigma(u_o) + \lambda(v^o)\right] = \frac{1}{2(1-\nu^2)}\int_{II}\left\{\left[h' - \mu f(\cos^2\alpha + \nu\sin^2\alpha)\right]^2 + \right.$$

$$\left. + 2(1-\nu)\left[\frac{g'}{2} - \sin\alpha\cos\alpha\,\mu f\right]^2 + \mu^2 f^2 \sin^4\alpha\,(1-\nu^2)\right\}dx$$

Le minimum de $\mathcal{M}_{II}$ est donc atteint pour :

$$h = \mu(\cos^2\alpha + \nu\sin^2\alpha)\int_0^Y f(\frac{y}{b})\,dy \quad \text{et}$$

$$g = 2\mu\sin\alpha\cos\alpha\int_0^Y f(\frac{y}{b})\,dy$$

qui vérifient manifestement les conditions imposées à h et g . On a donc finalement :

$$\mathcal{M}_d\left[{}^{(2)}\lambda(v^o)\right] = \frac{\mu^2\sin^4\alpha}{2}\int_{II} f^2(\frac{Y}{b})\,dx.$$

4) <u>D'où pour $(\overline{F}-)dd$</u> :

$$\boxed{(\overline{F}-)dd = -\inf_{\hookrightarrow f\in H_o^2(0,1),\ \|f'\|_o = 1}\left[b\,\mu\sin^3\alpha\int_{II}\left[f(\frac{Y}{b})\right]^2 dx + \frac{1}{12\mu(1-\nu^2)b^3\sin\alpha}\int_{II}\left[f''(\frac{Y}{b})\right]^2 dx\right]}$$

5) <u>Dans le cas où les bords latéraux</u> de l'appendice sont deux hélices parallèles (fig. 5.7) , il vient :

$$(\overline{F}-)dd = -\frac{\mathcal{C}(\alpha)}{12\mu(1-\nu^2)b^2\sin\alpha}\inf_{\hookrightarrow f\in H_o^2,\ \|f'\|_o = 1}\left[\int_0^1\left[f''(z)\right]^2 dz + \mu^2\Omega^2\int_0^1\left[f(z)\right]^2 dz\right]$$

avec $\Omega^2 = 12(1-\nu^2)\,b^4\sin^4\alpha$.

De façon classique, si $\bar{f}$ réalise le minimum du crochet du second membre, et si $2k$ est ce minimum, alors $\bar{f}$ est solution de l'équation :

$$f^{IV} + 2\,k\,f'' + \mu^2\,\Omega^2\,f = 0$$

et $2k$ est la plus petite valeur (propre) positive pour laquelle l'équation ci-dessus possède une solution non nulle appartenant à $H_0^2\,(0\,,\,1)$.

La résolution de cette équation montre que les équations aux valeurs propres k positives sont : $k > \mu\,\Omega$ et $\psi^1(k) = \psi^2(k)$, avec :

$$\psi^i(k) = \frac{1 - \cos f^i(k)}{\left[f^i(k)\right]^2}\ ,\quad f^1(k) = \sqrt{2\,(k - \mu\,\Omega)}\ ,\quad f^2(k) = \sqrt{2\,(k + \mu\,\Omega)}$$

On pourrait être tenté, pour résoudre de façon approchée cette équation, d'utiliser le fait que μ est très grand. Mais μ est ici multiplié partout par Ω, qui est petit avec α. Or, en optimisant comme précédemment par rapport à la bande CDEF, nous serons entrainés vers des α petits.

Remarquons que le premier zéro supérieur à $\mu\,\Omega$ de $\psi^1(k)$, est $k_1 = \mu\,\Omega + 2\,\pi^2$ et que par conséquent, $\psi^1(k_1) \leqslant \psi^2(k_1)$. Remarquons par ailleurs que $\psi^1(\mu\,\Omega) = \frac{1}{2} > \psi^2(\mu\,\Omega)$. On en déduit que la première valeur propre cherchée est comprise entre $\mu\,\Omega$ et $k_1 = \mu\,\Omega + 4\,\pi^2$. Prenant la borne supérieure k_1, on obtient une borne inférieure pour $|\bar{F}-|\,d\,d$, soit

$$|\bar{F}-|\,d\,dd = -\left[\frac{\ell(\alpha)\,\sin\alpha}{2\sqrt{3}\,(1-\nu^2)} + \frac{\ell(\alpha)\,\pi^2}{3\,\mu\,(1-\nu^2)\,b^2\sin\alpha}\right]$$

<u>Optimisation du résultat par rapport à la bande</u> : Comme pour F-, on constate que pour α déterminé on obtient le résultat optimun en choisissant pour b la valeur maximum $\bar{b}(\alpha)$. Il vient donc, en calculant $\ell(\alpha)$ et $\bar{b}(\alpha)$:

$$(\bar{F}-)d\ d\ d)\ opt = -\frac{\sin\beta}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}} \inf_{\alpha \in [0,\ \alpha_0]} \left[\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\ \sin^2(\beta-\alpha_0)}{\mu\sqrt{3(1-\nu^2)}\ \sin^2\beta\ \sin(\beta-\alpha)\sin\alpha}\right]$$

On peut maintenant utiliser le fait que μ est grand : chacun des deux termes du crochet est positif ; le premier est nul avec α , petit avec α et fini ou infini pour α non petit ; le second est infini pour α nul, mais décroit très rapidement lorsque α croît, pour être par exemple petit pour $\alpha = \frac{1}{\mu^{1/2}} \simeq 0$. On peut donc prévoir que le minimum du crochet sera atteint pour α petit. Linéarisant ce crochet au voisinage de $\alpha = 0$, on obtient une valeur approchée de son minimum.

Il vient finalement :

$$\left[(\bar{F}-)d\ d\ d\right] opt \simeq -\frac{1}{\mu^{1/2}}\ \frac{\sqrt{2}}{\left[3(1-\nu^2)\right]^{3/4}}$$

<u>Remarque</u> La valeur ci-dessus est en $\frac{1}{\mu^{1/2}}$, donc petite en module . Elle correspond à des contraintes faibles (on rappelle que la charge critique d'Euler est $F_{cr} = \frac{2\pi}{\left[3(1-\nu^2)\right]^{1/2}}$) . On peut donc conclure que les équations non linéaires étudiées ici ne sont pas adaptées, et particulièrement si on recherche les positions d'équilibre par minimisation de l'énergie (méthode de Galerkin, etc...) . Insistons à nouveau sur le fait que nous ne mettons pas ainsi en évidence une faiblesse particulière de la coque, mais très probablement une insuffisance de la schématisation, au niveau des relations déplacements - déformations.

d) Variante de l'exemple précédent

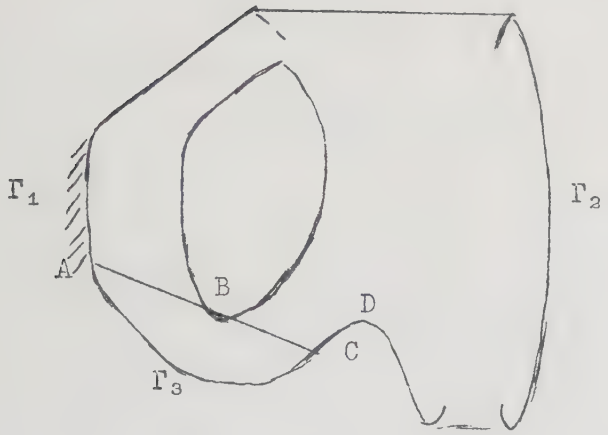


Fig. 4-10

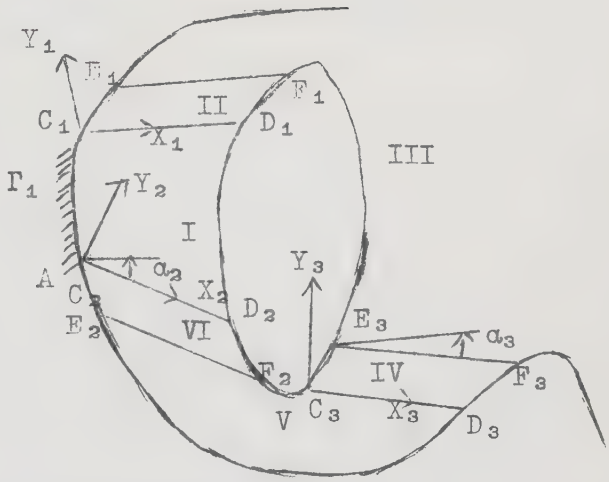


Fig. 4-11

Considérons une coque ayant la géométrie de la figure 4.10 : il existe une hélice partant de la région d'ancrage Γ_1 par le haut et atteignant Γ_2, mais il n'en existe pas passant par le bas. En particulier, l'hélice partant de A et tangente en B à Γ_3 atteint à nouveau Γ_3 en C. Il existe donc trois bandes analogues à celle définie dans l'exemple précédent, $C_i\ D_i\ E_i\ F_i$, disposées comme indiqué sur la figure 4.11, et telles en particulier que $\alpha_2 > \alpha_3$.

On rapporte les voisinages de ces bandes aux axes locaux $C_i\ \vec{X}_i\ \vec{Y}_i$ (C F fig 4.11).

Il résulte de $\alpha_2 > \alpha_3$ que $\vec{Y}_3 = k_1 \vec{Y}_1 + k_2 \vec{Y}_2$, avec k_1 et $k_2 > 0$.

Ces bandes déterminent sur la coque six régions distinctes : I , ... VI .

Soit Φ_d l'ensemble des fonctions $v = (v_0 , v^0)$ définies sur Σ par :

$$V^0 = \begin{cases} 0 \text{ sur } I , III , V \\ f_1\left(\frac{Y_1}{b_1}\right) \text{ sur } II \quad , \quad f_2\left(\frac{Y_2}{b_2}\right) \text{ sur } VI \quad , \quad f_3\left(\frac{Y_3}{b_3}\right) \text{ sur } IV \end{cases}$$

$$\vec{V}_0 = \begin{cases} 0 \text{ sur } I \quad ; \quad -\frac{\mu}{2\, b_1^2}\int_0^{Y_1}\left[f'_1\left(\frac{y}{b_1}\right)\right]^2 dy\, \vec{Y}_1 \text{ sur } II \quad ; \\ \qquad -\frac{\mu}{2}\int_0^{b_1}\left[f'_1\left(\frac{y}{b_1}\right)\right]^2 dy\, \vec{Y}_1 \text{ sur } III \\ \frac{-\mu}{2\, b_2^2}\int_0^{Y_2}\left[f'_2\left(\frac{y}{b_2}\right)\right]^2 dy\, \vec{Y}_2 \text{ sur } VI \quad ; \\ \qquad \frac{-\mu}{2\, b_2^2}\int_0^{-b_2}\left[f'_2\left(\frac{y}{b_2}\right)\right]^2 dy\, \vec{Y}_2 \text{ sur } V \\ \frac{-\mu}{2\, b_2^2}\int_0^{-b_2}\left[f'_2\left(\frac{y}{b_2}\right)\right]^2 dy\, \vec{Y}_2 - \frac{\mu}{2\, b_3^2}\int_0^{Y_3}\left[f'_3\left(\frac{y}{b_3}\right)\right]^2 dy\, \vec{Y}_3 \text{ sur } IV \end{cases}$$

avec $f_i \in H_0^2(0 , 1)$ et, ce qui est possible puisque k_1 et k_2 sont positifs :

$$\frac{1}{k_2\, b_2^2}\int_{-b_2}^{0}\left[f'_2\left(\frac{y}{b_2}\right)\right]^2 dy = \frac{1}{k_1\, b_1^2}\int_0^{b_1}\left[f'_1\left(\frac{y}{b_1}\right)\right]^2 dy = \frac{1}{b_3^2}\int_0^{b_3}\left[f'_1\left(\frac{y}{b_1}\right)\right]^2 dy$$

On vérifie que $\Phi_d \subset \Phi$, et que pour $v \in \Phi_d$, on a :

$$< g_0 , v_0 > = F\, u_1|_{\Gamma_1} = \frac{\mu}{2}\int_0^{b_1}\left[f'_1\left(\frac{y}{b_1}\right)\right]^2 dy \sin\alpha_i\, F$$

qui est négatif lorsque F est négatif, c'est à dire lirsque la machine tra-

vaille en traction. Nous sommes donc à nouveau en présence d'un cas où les résultats de A-4 ne s'appliquent pas, c'est à dire où il existe $F-$ et $\bar{F}-$, etc....

Remarque :

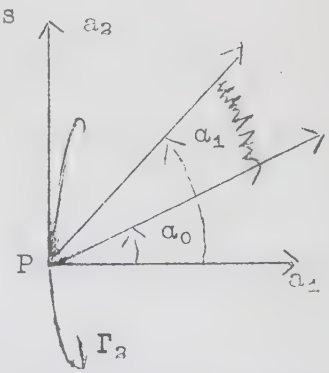
a) Cas où les forces de torsion ne sont pas nulles

On a alors : $< g_0 , v_0 >_V = F\, v_1|_{\Gamma_2} + M\, v_2|_{\Gamma_2}$ (*)

où P est un point quelconque de Γ_2.

Modification du paragraphe 1 : On montre que les résultats de A-4 s'appliquent, c'est à dire que $E(u)$ est borné inférieurement, si il existe deux hélices G_1 et G_2, situées sur $\bar{\Sigma}$, partant de la zône d'ancrage, aboutissant en deux points P_1 et P_2 de Γ_2 avec deux vecteurs unité en ces points, $\vec{t}^{\,\alpha} = \sum_\beta k^{\alpha\beta} \vec{a}_\beta (P\alpha)$, tels que, posant $\vec{\tau}^{\,\alpha} = \sum_\beta k^{\alpha\beta} \vec{a}_\beta (P)$, où P est un point quelconque de Γ_2, le vecteur $\vec{\Phi} = -F\,\vec{a}_1(P) - M\,\vec{a}_2(P)$ soit dans l'angle saillant formé par $\vec{\tau}^1$ et $\vec{\tau}^2$. Une condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi est évidemment que F soit négatif.

Modification du paragraphe 2 : Nous supposons $F < 0$. Le secteur (d'amarrage) défini en $P \in \Gamma_2$ par les vecteurs $\vec{\tau}$, déduits des géodésiques joignant Γ_1 à Γ_2 comme il a été dit ci-dessus, a la disposition ci-contre, où α_0 est précisément l'angle α_0 de la figure 4-9 et où α_1 correspond à l'hélice joignant Γ_1 à Γ_2 la plus inclinée sur les généra-



(*) - Nous avons dans ce sous chapitre orienté la normale au cylindre vers l'extérieur, ce qui explique le changement de signe devant M par rapport au paragraphe II-6, M gardant la même définition.

trices. Le vecteur $\vec{\Phi}$ vérifie la condition ci-dessus (est V.A.) si et seulement si on a :

$$- F \operatorname{tg} \alpha_0 \leqslant - M \leqslant - F \operatorname{tg} \alpha_1$$

Supposons cette condition non réalisée, avec par exemple $- M < - F \operatorname{tg} \alpha_0$. Posons $\frac{M}{F} = \operatorname{tg} \beta$, avec $\beta \in \left) - \frac{\pi}{2} , \alpha_0 \right($. Considérons une bande C D E F définie comme au paragraphe 2 , mais avec cette fois $\alpha \in \left] \beta , \alpha_0 \right[$ au lieu de $\left] 0 , \alpha_0 \right[$. Associons lui l'ensemble $\Phi_d \subset \Phi$ défini comme précédemment. On a pour tout $v \in \Phi_d$:

$$< g_0 , v_0 >_v = - \frac{\mu}{2 b^2} \int_0^b \left[f' \left(\frac{y}{b}\right) \right]^2 d y \, \vec{Y} . \vec{\Phi} = K^2 (- \sin \alpha \; F + \cos \alpha \, M)$$

$$= - F K^2 \cos \alpha \left[\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha \right] < 0$$

On constate ici encore que les conditions de la remarque 4-2 ne sont pas vérifiées, donc qu'il existe $\mathbf{F}-$ et $\overline{\mathbf{F}}-$ tels que .....

Pour le cas où $- M > - F \operatorname{tg} \alpha_1$, il conviendrait de prendre des bandes avec $\alpha \in \left] \alpha_1 , \frac{\pi}{2} \right[$.

b) <u>Cas où S_2 ne peut que se translater</u>, sans tourner autour de Δ . On a alors pour tout $u \in W$ la condition aux limites supplémentaire $u_2|_{\Gamma_2} = 0$. Par suite, pour tout $u \in W$: $\vec{u}_0 (P) . \vec{a}_2 (P) = 0 \quad \forall \; P \in \Gamma_2$.

$\vec{a}_2$ et $- \vec{a}_2$ sont donc vecteurs d'amarrage en $P \in \Gamma_2$, et il suffit qu'il existe une hélice joignant Γ_1 et Γ_2 pour que $E (u)$ soit bornée inférieurement pour toute charge telle que $F \leqslant 0$.

L'exemple 2 ci-dessous, consacré au cas où F est positif,

s'applique à la fois au cas où le paramètre de rotation de S_2 est bloqué, et au cas où il est libre.

3.- Exemple 2 : Machine en compression

Nous envisageons maintenant le cas d'une machine travaillant en compression, et nous nous bornons au cas où Ω est un cylindre droit homogène, Γ se compose donc d'un cercle directeur Γ_1 suivant lequel le cylindre est encastré sur S_1, et d'un autre cercle directeur Γ_2 le long duquel le cylindre est en contact avec S_2. Nous envisagerons non seulement le cas où le cylindre est simplement supporté sur S_2 comme il avait été dit (cas 1), mais aussi le cas où le cylindre est encastré sur S_2 (cas 2).

a) Détermination de l'ensemble Φ :

Il résulte de la remarque 1 du paragraphe A-4.d que pour tout $v \in \Phi$, v^o est constant sur chaque cercle directeur de Ω, puisque ces cercles sont des géodésiques fermées de la coque. Par conséquent, v^o n'est fonction que de x^1.

Inversement, montrons qu'à tout $v^o = f(x^1) \in H^2(0, \ell)$, où ℓ désigne la longueur (réduite) du cylindre, correspond un et un seul $v_0(f) \in V_A$ tel que $v = \left(v_0(f), f\right) \in \Phi$. Un tel v_0 est défini par $\sigma(v_0) + \varphi(f) = 0$ et les conditions aux limites de V_A, c'est à dire par les équations :

$$\frac{\partial v_1}{\partial x^1} + \frac{\mu}{2}\left[f'(x^1)\right]^2 = 0 \quad ; \quad \frac{\partial v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial v_2}{\partial x^1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial v_2}{\partial x^2} = 0$$

associées aux conditions aux limites $v_{\alpha|\Gamma_1} = 0$ et $v_{\alpha|\Gamma_2} = \text{cste}$, et aux conditions de périodicité en x^2 des éléments de V. On en déduit nécessairement :

$$v_1(f) = -\frac{\mu}{2}\int_0^{x^1}\left[f'(y)\right]^2 dy \quad , \quad v_2(f) = 0 .$$

On a donc finalement :

$$\Phi = \left\{ v \mid v = \left(-\frac{\mu}{2} \int_0^{x^1} \left[f'(y) \right]^2 dy \ , \ 0 \ , \ f \right) \ ; \ f \in \tilde{H} \right\}$$

avec $\tilde{H} = \left\{ f \mid f \in H^2(0 \ , \ \ell) \ ; \ f(0) = f'(0) = f(\ell) = 0 \right\}$ dans le cas 1.

$\tilde{H} = \left\{ f \mid f \in H^2(0 \ , \ \ell) \ ; \ f(0) = f'(0) = f(\ell) = f'(\ell) = 0 \right\}$ dans le cas 2.

On remarque que pour tout $v \in \Phi^*$, et pour $F > 0$, on a :

$$< g_0 \ , \ v_0 > = F \ v_1|_{\Gamma_2} = - F \frac{\mu}{2} \int_0^{\ell} \left[f'(y) \right]^2 dy < 0$$

On n'est donc pas dans le cadre de la remarque 4.2 . Il existe donc des coefficients $F+$ et $\overline{F}+$ tels que $E(u)$ atteigne son minimum sur W pour $F \in [0 \ , F+[$, et ne soit pas bornée inférieurement pour $F > \overline{F}+$

b) <u>Calcul de $F+$</u> :

On a pour tout $v \in \Phi$:

$$\chi_{11}(v^o) = f''(x^1) \ ; \ \chi_{12} = \chi_{21} = \chi_{22} = 0 \ ; \ \mathcal{M}\left[\chi(v^o) \right] = \frac{2\pi}{24(1-\nu^2)} \int_0^{\ell} \left[f''(x^1) \right]^2 dx^1$$

On en déduit, puisque ici encore $E_A^o(v^o)$ est nul :

$$F+ = \frac{2\pi}{12\mu(1-\nu^2)} k \qquad \text{avec} \qquad k = \inf_{f \in \tilde{H} \ , \ \int_0^{\ell} \left[f'(y) \right]^2 dy = 1} \int_0^{\ell} \left[f''(y) \right]^2 dy$$

Comme précédemment, k s'interprète comme étant la plus petite valeur propre positive du problème aux valeurs propres : $f^{IV} + k f'' = 0$, avec les conditions aux limites :

$$f(0) = f'(0) = f(\ell) = f''(\ell) = 0 \qquad \text{dans le cas } 1$$

$$f(0) = f'(0) = f(\ell) = f'(\ell) = 0 \qquad \text{dans le cas } 2$$

On trouve : $k \simeq \frac{2\pi^2}{\ell^2}$ dans le cas 1 , et $k = \frac{4\pi^2}{\ell^2}$ dans le cas 2 (plus précisément, dans le cas 1 , $\ell\sqrt{k}$ est la première racine positive de $\operatorname{tg} u = u$)

c) <u>Détermination de $\mathcal{N}[{}^{(2)}\lambda(v^\circ)]$ lorsque $v \in \Phi$</u>

$$\mathcal{N}\left[{}^{(2)}\lambda(v^\circ)\right] = \inf_{u_0 \in V_A} \mathcal{N}\left[\sigma(u_0) + \lambda(v^\circ)\right], \quad \text{avec} \quad v^\circ = f(x^1) \in \tilde{H}$$

Remarquant que, pour le calcul de $\mathcal{N}$:

$$(y_{11} + y_{22})^2 + 2(1-\nu)(y_{12}^2 - y_{11}y_{22}) =$$

$$(y_{11} + \nu y_{22})^2 + (1-\nu^2) y_{22}^2 + 2(1-\nu) y_{12}^2$$

il vient pour $\mathcal{N}\left[\sigma(u_0) + \lambda(v^\circ)\right]$:

$$\frac{1}{2(1-\nu^2)} \int_0^{\ell}\int_0^{2\pi} \left\{ \left[\frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \nu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \mu f\right)\right]^2 + (1-\nu^2)\left[\frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \mu f\right]^2 + \right.$$

$$\left. 2(1-\nu)\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1}\right)^2\right]\right\} dx^1\, dx^2$$

Décomposant le carré $\left(\frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \mu f\right)^2$, et remarquant que puisque u_2 est périodique en x^2, on obtient zéro pour l'intégration en x^2 du

terme rectangle, il vient :

$$\mathcal{N}\left[{}^{(2)}\lambda(v^o)\right] = \frac{2\pi\mu^2}{2}\int_0^{\ell}\left[f(x^1)\right]^2 dx^1$$

$$+ \frac{1}{2(1-\nu^2)} \inf_{u_o \in V_A} \int\left\{\left[\frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \nu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \mu f\right)\right]^2 + (1-\nu^2)\left[\frac{\partial u_2}{\partial x^2}\right]^2 + \right.$$

$$\left. + 2(1-\nu)\frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1}\right)^2\right\} dx^1\, dx^2$$

L'intégrale à minimiser est positive en général , et nulle pour

$u_o = \left(\nu\mu\int_0^{x^1} f(y)\,dy\ ,\ 0\right)$ qui appartient bien à V_A . On a donc :

$$\mathcal{N}\left[{}^{(2)}\lambda(v^o)\right] = \frac{2\pi\mu^2}{2}\int_0^{\ell}\left[f(x^1)\right]^2 dx^1 \quad , \text{ ainsi que :}$$

$$\left[{}^{(2)}\lambda(v^o)\right]_{11} = \nu\mu f(x^1) \quad , \quad [\ ]_{12} = [\ ]_{21} = 0 \quad , \quad [\ ]_{22} = -\mu f(x^1)$$

d) <u>Détermination de $\mathcal{N}\left[{}^{(4)}\lambda(v^o)\right]$ pour $v \in \Phi$</u>

$$\mathcal{N}\left[{}^{(4)}\lambda(v^o)\right] = \inf_{(0,w^o)\in W} \mathcal{N}\left[{}^{(2)}\lambda(v^o) + {}^{(2)}\varphi(v^o, w^o)\right]$$

$$= \mathcal{N}\left[{}^{(2)}\lambda(v^o)\right] + \inf\left[2\mathcal{N}\left[{}^{(2)}\lambda(v^o)\ ,\ {}^{(2)}\varphi(v^o,w^o)\right] + \mathcal{N}\left[{}^{(2)}\varphi(v^o,w^o)\right]\right]$$

Nous allons montrer que le terme rectangle est nul pour tout w^o , ce qui prouvera que le minimum est atteint pour $w^o = 0$, et donc que :

$$\mathcal{N}\left[{}^{(4)}\lambda\,(v^o)\right] = \mathcal{N}\left[{}^{(2)}\lambda\,(v^o)\right] \qquad \forall\, v \in \Phi$$

$\mathcal{N}\,(y\,,\,z)$ se met encore sous la forme :

$$\frac{1}{2\,(1-\nu^2)}\int_\Omega (y_{11}+\nu\, y_{22})\,(z_{11}+\nu\, z_{22}) + (1-\nu^2)\, y_{22}\, z_{22} + 2\,(1-\nu)\, y_{12}\, z_{12}$$

Prenant ici $y = {}^{(2)}\lambda\,(v^o)$, on vérifie que $y_{12} = 0$ et $y_{11} + \nu\, y_{22} = 0$.

On a donc :

$$\mathcal{N}\left[{}^{(2)}\lambda\,(v^o)\,,\,{}^{(2)}\varphi\,(v^o,w^o)\right] = -\frac{1}{2}\,\mu\int_\Omega f\,(x^1)\;{}^{(2)}\varphi_{22}\,(v^o,w^o)\;dx^1\;dx^2$$

Soit, pour w^o donné, $\tilde{u}_o \in V_A$ tel que $\sigma\,(\tilde{u}_o) = {}^{(1)}\varphi\,(v^o,w^o)$. On a :

$${}^{(2)}\varphi\,(v^o,w^o) = \varphi\,(v^o,w^o) - {}^{(1)}\varphi\,(v^o,w^o) = \varphi\,(v^o,w^o) - \sigma\,(\tilde{u}_o)$$

et, puisqu' ici $\varphi_{22}\,(v^o,w^o) = 0$ $\left(\text{car } v^o = f\,(x^1)\right)$, il vient :

$${}^{(2)}\varphi_{22}\,(v^o,w^o) = -\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x^2}$$

Par suite :

$$\mathcal{N}\left[{}^{(2)}\lambda\,(v^o)\,,\,{}^{(2)}\varphi\,(v^o,w^o)\right] = \frac{\mu}{2}\int_\Omega f\,(x^1)\,\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x^2}\;dx^1\;dx^2 = 0$$

puisque u_2 est périodique en x^2 .

e) <u>Calcul de $\bar{F}+$</u>

On déduit du calcul de $\mathcal{N}\left[{}^{(4)}\lambda\,(v^o)\right]$ ci-dessus :

$$\bar{F}+ = \frac{2\,\pi}{12\,(1-\nu^2)\,\mu}\;2\,k \quad \text{avec} \quad k = \inf_{f \in \tilde{H},\ \int_0^\ell [f'(y)]^2\,dy = 1} \frac{1}{2}\left[\int_0^\ell [f'']^2\,dy + \mu^2\,\Omega^2\int_0^\ell f^2\,dy\right]$$

et $\Omega^2 = 12\,(1-\nu^2)$

Le minimum k est la plus petite valeur propre positive de l'équation :

$$f^{IV} + 2\,k\,f'' + \mu^2\,\Omega^2\,f = 0$$

associée aux conditions aux limites :

$$f(0) = f'(0) = f(\ell) = f''(\ell) = 0 \qquad \text{dans le cas 1.}$$

$$f(0) = f'(0) = f(\ell) = f'(\ell) = 0 \qquad \text{dans le cas 2.}$$

L'équation aux valeurs propres est :

$$k > \mu\,\Omega \quad , \quad \frac{\sin \ell\sqrt{2(k+\mu\,\Omega)}}{\ell\sqrt{2(k+\mu\,\Omega)}} = \frac{\sin \ell\sqrt{2(k-\mu\,\Omega)}}{\ell\sqrt{2(k-\mu\,\Omega)}} \qquad \text{dans le cas 1}$$

$$k > \mu\,\Omega \quad , \quad \frac{1-\cos \ell\sqrt{2(k+\mu\,\Omega)}}{(k+\mu\,\Omega)} = \frac{1-\cos \ell\sqrt{2(k-\mu\,\Omega)}}{k-\mu\,\Omega} \qquad \text{dans le cas 2.}$$

Le coefficient μ étant très grand, on vérifie que la première racine supérieure à $\mu\,\Omega$ est dans les deux cas très légèrement supérieur à $\mu\,\Omega$.

On a donc finalement dans les deux cas : $\overline{F}+ \simeq Fcr = \dfrac{2\,\pi}{\sqrt{3\,(1-\nu^2)}}$

f) Commentaires

1°) On remarque que le coefficient $F+$ est très variable avec les conditions aux limites, et qu'il est très inférieur à la charge critique d'Euler, du fait de la présence de μ au dénominateur.

Par contre, $\overline{F}+$ varie peu avec les conditions aux limites , tout comme la charge critique d'Euler dont il est voisin (la valeur Fcr donnée ici est celle obtenue classiquement en négligeant les conditions initiales. On obtient d'ailleurs $\overline{F}+ = Fcr$ en procédant de la même façon pour calculer $\overline{F}+$).

2°) On constate que dans l'exemple présent, le domaine $F \in [F+ , \bar{F}+]$, pour lequel les résultats du paragraphe A ne permettent pas de conclure, se trouve être le plus intéressant dans la pratique : on sait en effet que pour étudier le comportement d'un tel cylindre après flambage, ou pour déterminer une limite de sécurité $F < Fcr$ de la charge F en deça de laquelle le cylindre ne peut flamber, on est amené à rechercher des solutions minimisant $E(u)$ pour des charges $F < Fcr$. Nous sommes ici assurés de l'existence d'un tel minimum pour $F < F+ << Fcr$, et de la non existence pour $F > Fcr$, mais nous ne savons rien pour $F \in [F+ , \bar{F}+]$. Remarquons encore que les conditions $F < F+$ (ou $\gamma < \gamma+$) et $F > \bar{F}+$ des propositions 4.4 et 4.6 ne sont que suffisantes.

Il ne nous a pas été possible de les affiner dans le cas général. Remarquons enfin que ces conditions ne font absoluement pas intervenir le terme $< g^o , u^o >$ de $E_p(u)$. Or, il est bien connu que les efforts normaux exercés sur la coque ont une grande influence sur le flambement de cette coque. Cette dernière remarque n'engage pas à poursuivre l'étude du flambement dans cette voie.

Nous retrouverons ces problèmes de flambement dans le cas général, au sous chapitre suivant.

3 .- Cas de la machine à tester de type déplacement imposé

Dans une telle machine, le solide S_2 est comprimé par un ressort de raideur réduite K', dont l'autre extrémité subit à partir de la position initiale un déplacement donné $\overrightarrow{d\,x_1}$.

L'énergie potentielle des deux ressorts est alors : $\frac{K}{2}(u_1|_{\Gamma_1})^2 + \frac{K'}{2}(u_1|_{\Gamma_2} - d)^2$

Par conséquent, en l'absence de forces de surface tangente, on a :

$$E_{A_0}(u_0) = \frac{K}{2}(u_{1|\Gamma_1})^2 + \frac{K'}{2}(u_{1|\Gamma_2})^2 \quad \text{et} \quad < g_0 , u_0 > = - K' d \; u_{1|\Gamma_2}$$

On a donc pour $v \in V_A$: $v_{1|\Gamma_1} = 0$, $v_{1|\Gamma_1} = 0$ donc $< g_0 , v_0 > = 0$

On est donc dans le cadre de la remarque 4.2 , et $E(u)$ atteint son minimum sur W , quel que soit le déplacement d . Les méthodes classiques de recherche de positions d'équilibre flambées par minimisation de $E(u)$ ne sont donc pas contestables dans ce cas. Disons d'ailleurs que le cylindre expérimenté en flambement est perdu dans le cas d'une machine poids mort, alors qu'il ne l'est pas nécessairement dans le cas d'une machine à déplacement imposé, ce qui va dans le sens des résultats théoriques ci-dessus . Par contre , et c'est ce point qui est intéressant dans la pratique, l'état de compression du cylindre à partir duquel le flambement s'amorce dépend beaucoup moins du type de machine utilisé . Cette dernière remarque nous confirme dans notre intention de ne pas poursuivre l'étude du flambement dans cette voie.

Et ce, d'autant plus que, comme il a été dit, le fait pour $E(u)$ de n'être pas bornée inférieurement dans certains cas de charge est plus imputable à la forme approchée des relations déplacement-déformation qui a été retenue, qu'à une faiblesse particulière de la coque.

SOUS CHAPITRE C : SOLUTIONS VOISINES DE LA SOLUTION DU PROBLEME LINEAIRE

Soit $\bar{u}$ la solution du problème linéarisé relative à un certain état de charges caractérisé par l'énergie potentielle $E_p(u)$, vérifiant donc :

$$(4.17) \quad 2\mathcal{N}\left[\varepsilon_L(\bar{u}), \varepsilon_L(v)\right] + 2\mathcal{M}\left[\chi(\bar{u}), \chi(v)\right] + 2E_A(\bar{u}, v) + E_p(v) = 0 \quad \forall v \in W.$$

Nous considérons maintenant un état de charge obtenu à partir du précédent en le multipliant par le scalaire positif γ. Le problème linéaire (P.L.) possède alors la solution $\gamma\bar{u}$. Nous nous proposons d'étudier l'existence de solutions du problème 3 non linéaire (P.N.L.3) voisines de $\gamma\bar{u}$.

1.- Cas général.

a - Proposition 4.15

Pour γ suffisamment petit, le P.N.L. 3 possède une solution $u(\gamma)$ dont l'écart relatif avec $\gamma\bar{u}$ tend vers zéro avec γ. Cette solution est la seule solution du P.N.L.1, donc du P.N.L. 3, tendant vers zéro avec γ.

Plus précisément : il existe $\gamma_0 > 0$ et deux voisinages $V_1(0)$ et $V_2(0)$ de zéro dans W tels que pour tout $\gamma < \gamma_0$:

1 - Le P.N.L. 3 possède une solution dans le voisinage $\gamma\bar{u} + \gamma^2 V_1(0)$ de $\gamma\bar{u}$

2 - Cette solution est la seule solution du P.N.L. 1 appartenant au voisinage $\gamma\bar{u} + V_2(0)$ de $\gamma\bar{u}$

Démonstration.

1) Existence de la solution - Nous savons, en application de la propo-

sition 4.1, que si il existe $\rho_1 > 0$ et un voisinage convexe de l'origine dans W, soit S, de frontière δS, tels que :

$$G(\rho_1, u) = E(\gamma\bar{u} + \rho_1 u) - E(\gamma\bar{u}) > 0 \quad \forall u \in \delta S$$

alors il existe une solution $u(\gamma)$ du P.N.L. 3 telle que $u(\gamma) - \gamma\bar{u} \in \rho_1 S$.

Nous allons montrer que, pour γ suffisamment petit, un tel ρ_1 existe et est inférieur à $k\gamma^2$, où k est une constante. Le point 1 de la proposition sera alors établi, avec $V_1(0) = kS$.

On pose : $\varphi_{\alpha\beta}(u, v) = \frac{\mu}{4}(u^{\circ}_{|\alpha} v^{\circ}_{|\beta} + u^{\circ}_{|\beta} v^{\circ}_{|\alpha})$, de telle sorte que

$$\varepsilon(\gamma\bar{u} + \rho u) = \gamma\varepsilon_L(\bar{u}) + \gamma^2\varphi(\bar{u}) + \rho(\varepsilon_L(u) + 2\gamma\varphi(\bar{u}, u) + \rho^2\varphi(u)$$

Effectuant le calcul de $G(\rho, u)$, il vient, pour tout ρ et tout u, en tenant compte de (4.17) :

$$(4.18) \quad G(\rho, u) = \rho\left[\gamma^2 a_1(u) + \gamma^3 a_2(u)\right] + \rho^2\left[a(u,u) + \gamma b_1(u) + \gamma^2 b_2(u)\right] + \rho^3 c(u) + \rho^2\mathcal{N}\left[2\varphi(\gamma\bar{u}, u) + \rho\varphi(u)\right],$$

avec : $a(u, u) = \mathcal{N}\left[\varepsilon_L(u)\right] + \mathcal{M}\left[\chi(u)\right] + F_A(u)$

$$a_1(u) = 2\mathcal{N}\left[\varepsilon_L(\bar{u}), 2\varphi(\bar{u}, u)\right] + 2\mathcal{N}\left[\varphi(\bar{u}), \varepsilon_L(u)\right] ;$$

$$a_2(u) = 2\mathcal{N}\left[\varphi(\bar{u}), 2\varphi(\bar{u}, u)\right]$$

$$b_1(u) = 2\mathcal{N}\left[\varepsilon_L(\bar{u}), \varphi(u)\right] + 2\mathcal{N}\left[\varepsilon_L(u), 2\varphi(\bar{u}, u)\right] ;$$

$$b_2(u) = 2\mathcal{N}\left[\varphi(\bar{u}), \varphi(u)\right]$$

$$c(u) = 2\mathcal{N}\left[\varepsilon_L(u), \varphi(u)\right]$$

La forme quadratique $a(u,u)$ est celle intervenant dans le problème linéaire. Elle est ici supposée coercive. On peut donc choisir pour S l'ensemble des $u \in W$ tels que $a(u,u) < 1$. On déduit alors de (4.18), pour $\rho > 0$ et $u \in \delta S$:

$$(4.20) \qquad G(\rho, u) \geq -\rho(\gamma^2 a_1 + \gamma^3 a_2) + \rho^2 \left[1 - \gamma b_1 - \gamma^2 b_2\right] - c\rho^3$$

où a_1, a_2, b_1, b_2, c sont des scalaires majorant sur δS les quantités (bornées sur δS) : $|a_1(u)|, \ldots, |c(u)|$

$G(\rho, u)$ est donc supérieur à une fonction $f(\rho)$ de la forme $-a\rho + B\rho^2 - c\rho^3$, où a tend vers zéro avec γ, et B tend vers 1, c restant constant. Pour γ suffisamment petit, $B^2 - 4ac$ est positif. Par suite, $f(\rho)$ s'annule pour $\rho = 0$ et pour $\rho = \dfrac{B \pm \sqrt{B^2 - 4ac}}{2c} > 0$, et est positive entre ces deux dernières racines.

Tout ρ_1 entre ces deux racines est donc tel que $G(\rho_1, u) > 0$.

Pour γ petit, ces racines sont voisines de $a \ll 1$ et $\frac{1}{c}$. On pourra prendre par exemple $\rho_1 = 2a = 2(a_1\gamma^2 + a_2\gamma^3) \leq 4a_1\gamma^2$ pour γ suffisamment petit,

Le point 1 est donc établi.

2) <u>Unicité</u> - La solution du P.N.L. 3 mise en évidence précédemment étant $u(\gamma)$, on pose $u(\gamma) = \gamma\tilde{u}$, où $\tilde{u}$ dépend de γ et vérifie : $\tilde{u} - \bar{u} \in \gamma V_1(0)$ qui entraîne en particulier que $\tilde{u}$ est bornée pour γ borné.

Tout élément w de W se met sous la forme : $w = \gamma\tilde{u} + \rho u$, avec $\rho \geq 0$ et $u \in \delta S$, cette décomposition étant unique pour γ fixé. Supposons que $w_2 = \gamma\tilde{u} + \rho_2 u_2$ soit une solution du P.N.L. 1, autre que $\gamma\tilde{u}$ $(\rho_2 > 0)$.

$E(w)$ est alors stationnaire en w_2, et par conséquent :

$$(4.21) \qquad \frac{d}{d\rho} E(\gamma \tilde{u} + \rho u) = 0 \quad \text{pour} \quad u = u_2 \in \delta S \quad \text{et} \quad \rho = \rho_2 > 0$$

Nous allons montrer que pour γ suffisamment petit, il existe $\rho_0 > 0$ tel que (4.21) entraîne $\rho_2 > \rho_0$, ce qui établira le point 2 de la proposition, avec $V_2(0) = \rho_0 S$.

On a : $\frac{d}{d\rho} E(\gamma \tilde{u} + \rho u) = \frac{d}{d\rho} \tilde{G}(\rho, u)$ avec $\tilde{G}(\rho, u) = E(\gamma \tilde{u} + \rho u) - E(\gamma \tilde{u})$

Dans $\tilde{G}(\rho, u)$, les termes de degré zéro et de degré un en ρ sont nuls, puisque $\gamma \tilde{u}$ est solution du P.N.L. 3. Il vient, pour $u \in \delta S$:

$$\tilde{G}(\rho, u) = \rho^2 \left[1 + \gamma \tilde{b}_1(u) + \gamma^2 \tilde{b}_2(u) + \gamma^2 \mathcal{N}\left[2\varphi(\tilde{u}, u)\right] \right]$$
$$+ \rho^3 \left[c(u) + 2\gamma \mathcal{N}\left[2\varphi(\tilde{u}, u), \varphi(u)\right] \right] + \rho^4 \mathcal{N}\left[\varphi(u)\right]$$

où $\tilde{b}_1(u)$ et $\tilde{b}_2(u)$ s'obtiennent à partir de $b_1(u)$ et $b_2(u)$ en remplaçant dans ces expressions $\bar{u}$ par $\tilde{u}$. Dérivant en ρ et regroupant certains termes, il vient :

$$\frac{d}{d\rho} \tilde{G}(\rho, u) = 2\rho \left[1 + \gamma \tilde{b}_1(u) + \gamma^2 \tilde{b}_2(u) - \frac{\gamma^2}{8} \mathcal{N}\left[2\varphi(\tilde{u}, u)\right] \right] + 3\rho^2 c(u)$$
$$+ \rho \mathcal{N}\left[2\rho\varphi(u) + 3\gamma\varphi(\tilde{u}, u)\right]$$

Le dernier terme est positif ; $\tilde{u}$ est bornée, ainsi que $u \in \delta S$. Les différentes fonctions $\tilde{b}_1(u)$, $\tilde{b}_2(u)$, $\mathcal{N}\left[2\varphi(\tilde{u}, u)\right]$ et $c(u)$ sont donc bornées. Il vient donc, pour $\rho > 0$:

$$\frac{d}{d\rho} \tilde{G}(\rho, u) \geq 2\rho \left[1 - \gamma \tilde{b}_1 - \gamma^2 \tilde{b}_2 \right] - 3\rho^2 c \geq \rho - 3\rho^2 c$$

pour γ suffisamment petit. On peut donc par exemple choisir $\rho_0 = \frac{1}{6c}$

b - L'expérience montre qu'un système tel que celui que nous étudions peut posséder des positions d'équilibre, autres que la solution voisine de la solution linéaire, même pour de très faibles charges, voire pour des charges nulles. Il semble donc difficile d'élargir le résultat du point 2 ci-dessus à $V_2(0) = W$. On peut toutefois établir la proposition ci-dessous

Proposition 4.16

Pour γ suffisamment petit :

1 - toute solution du P.N.L.1 autre que la solution $u(\gamma)$ voisine de la solution linéaire correspond à un niveau d'énergie supérieur du système.

2 - $u(\gamma)$ est la seule solution du P.N.L. 1 si la courbure de la coque est suffisamment faible, ou si la coque est suffisamment épaisse.

Démonstration.

1) Il suffit de montrer pour établir le premier point, que pour γ suffisamment petit, on a :

$$E(w) - E\big(u(\gamma)\big) > 0 \quad \forall\, w \in W \;,\; w \neq u(\gamma)$$

On pose à nouveau $u(\gamma) = \gamma\tilde{u}$, et $w = \gamma\tilde{u} + u$. Il vient :

$$G(u) = E(\gamma\tilde{u} + u) - E(\gamma\tilde{u}) = \eta\Big[\varepsilon(u) + 2\gamma\varphi(\tilde{u}, u)\Big] +$$

$$2\gamma\eta\Big[\varepsilon_L(\tilde{u}), \varphi(u)\Big] + 2\gamma^2\eta\Big[\varphi(\tilde{u}), \varphi(u)\Big] + \eta\Big[\chi(u)\Big] + E_A(u).$$

Si $u^\circ = 0$, qui entraîne $u_0 \neq 0$ pour tout u non nul, on a

$$G(u) = \eta\Big[\sigma(u_0)\Big] + E_{A_0}(u_0) > 0$$

Si $u^\circ \neq 0$, il vient :

$$G(u) \geq \mathcal{M}\left[\chi(u^\circ)\right] + E_A^\circ(u^\circ) + 2\gamma\mathcal{N}\left[\varepsilon_L(\tilde{u}), \varphi(u^\circ)\right] + 2\gamma^2\mathcal{N}\left[\varphi(\tilde{u}), \varphi(u^\circ)\right]$$

Or, $\left[\mathcal{M}\left[\chi(u^\circ)\right] + E_A^\circ(u^\circ)\right]^{1/2}$ est une norme sur $H^2(\Omega)$ équivalente à la norme initiale, $\tilde{u}(\gamma)$ est borné lorsque γ tend vers zéro, et les coefficients de γ et γ^2 ci-dessus sont des formes quadratiques en u°, continues sur $H^2(\Omega)$.

On a donc :

$$G(u) \geq \left[\mathcal{M}\left[\chi(u^\circ)\right] + E_A^\circ(u^\circ)\right]\left[1 - \gamma d_1 - \gamma^2 d_2\right] > 0 \quad \text{pour } \gamma \text{ suffisamment petit.}$$

2) Soit $\overset{\times}{u}$ une solution du P.N.L. 1 . On a donc :

$$d^1E(\overset{\times}{u}; w) = 2\mathcal{N}\left[\sigma(\overset{\times}{u}_0) + \lambda(\overset{\times}{u}^\circ) + \varphi(\overset{\times}{u}^\circ), \sigma(w_0) + \lambda(w^\circ) + 2\varphi(\overset{\times}{u}^\circ, w^\circ)\right] +$$

$$+ 2\mathcal{M}\left[\chi(\overset{\times}{u}^\circ), \chi(w^\circ)\right] + 2E_A^\circ(\overset{\times}{u}^\circ, w^\circ) + 2E_{A_0}(\overset{\times}{u}_0, w_0) + \langle g_0, w_0\rangle +$$

$$\langle g^\circ, w^\circ\rangle = 0 \qquad \forall w \in W .$$

Soit $\overset{\times}{u} + \dot{u}$ une deuxième solution du P.N.L.1 . Elle vérifie une relation analogue à la précédente, obtenue en remplaçant $\overset{\times}{u}$ par $\overset{\times}{u} + \dot{u}$

On vérifie de façon classique l'unicité dans le cas linéaire, en écrivant chacune de ces relations avec $w = \dot{u}$ et en en faisant la différence.

Nous procédons ici de façon analogue, mais en choisissant pour w la valeur $w = (\dot{u}_0, \frac{1}{2}\dot{u}^\circ)$. Afin d'alléger l'écriture, nous convenons de poser pour toute fonctionnelle linéaire $\ell(u)$ et pour $\varphi(u, v)$:

$$\ell(\overset{\times}{u}) = \overset{\times}{\ell} \quad , \quad \ell(\dot{u}) = \dot{\ell} \quad , \quad \varphi(\overset{\times}{u}, \overset{\times}{u}) = \overset{\times}{\varphi} \quad , \quad \varphi(\overset{\times}{u}, \dot{u}) = \dot{\overset{\times}{\varphi}} \quad , \quad \varphi(\dot{u}, \dot{u}) = \dot{\varphi}$$

On obtient en faisant le calcul indiqué :

$$2\mathcal{N}\left[\overset{\times}{\dot{\sigma}} + \dot{\sigma} + \overset{\times}{\dot{\lambda}} + \dot{\lambda} + \overset{\times}{\dot{\varphi}} + 2\,\overset{\times}{\dot{\varphi}} + \dot{\varphi}\,,\ \dot{\sigma} + \frac{\dot{\lambda}}{2} + \overset{\times}{\dot{\varphi}} + \dot{\varphi}\right] - 2\mathcal{N}\left[\overset{\times}{\dot{\sigma}} + \overset{\times}{\dot{\lambda}} + \overset{\times}{\dot{\varphi}}\,,\ \dot{\sigma} + \frac{\dot{\lambda}}{2} + \overset{\times}{\dot{\varphi}}\right]$$

$$+\mathcal{M}\left[\dot{\chi}\right] + E^{\circ}_{A}\,(\dot{u}^{\circ}) + 2\,E_{A_0}\,(\dot{u}_0) = 0$$

Soit encore :

$$2\mathcal{N}\left[\dot{\sigma} + \dot{\lambda} + 2\,\overset{\times}{\dot{\varphi}} + \dot{\varphi}\,,\ \dot{\sigma} + \frac{\dot{\lambda}}{2} + \overset{\times}{\dot{\varphi}} + \dot{\varphi}\right] + 2\mathcal{N}\left[\overset{\times}{\dot{\sigma}} + \overset{\times}{\dot{\lambda}} + \overset{\times}{\dot{\varphi}}\,,\ \dot{\varphi}\right] + \mathcal{M}\left[\dot{\chi}\right]$$

$$+ E^{\circ}_{A}(\dot{u}^{\circ}) + 2\,E_{A_0}\,(\dot{u}_0) = 0$$

Le premier terme ci-dessus est encore égal à

$$2\mathcal{N}\left[\dot{\sigma} + \dot{\varphi} + \frac{3\,\dot{\lambda}}{4} + \frac{3\,\overset{\times}{\dot{\varphi}}}{2}\right] - 2\mathcal{N}\left[\frac{\dot{\lambda}}{4} + \frac{1}{2}\,\overset{\times}{\dot{\varphi}}\right]$$

et par conséquent, il vient :

$$E_{A_0}\,(\dot{u}_0) + 2\mathcal{N}\left[\dot{\sigma} + \dot{\varphi} + \frac{3\,\dot{\lambda}}{4} + \frac{3\,\overset{\times}{\dot{\varphi}}}{2}\right] + \mathcal{M}\left[\dot{\chi}\right] + E^{\circ}_{A}\,(\dot{u}^{\circ}) - \frac{1}{8}\mathcal{N}\left[\dot{\lambda}\right] - \frac{1}{2}\mathcal{N}\left[\dot{\lambda}\,,\,\overset{\times}{\dot{\varphi}}\right]$$

$$- \frac{1}{2}\mathcal{N}\left[\overset{\times}{\dot{\varphi}}\right] + 2\mathcal{N}\left[\overset{\times}{\dot{\sigma}} + \overset{\times}{\dot{\lambda}} + \overset{\times}{\dot{\varphi}}\,,\ \dot{\varphi}\right] = 0$$

Prenant pour solution $\overset{\times}{u}$ la solution $\gamma\,\tilde{u}$ voisine de la solution linéaire, il vient :

$$(4.22)\quad \left|\begin{array}{l} A + B = 0\ ,\ \text{avec}\ A = 2\mathcal{N}\left[\dot{\sigma} + \dot{\varphi} + \frac{3\,\dot{\lambda}}{4} + \frac{3}{2}\gamma\,\varphi(\tilde{u}, \dot{u})\right] + E_{A_0}\,(\dot{u}_0), \text{et} \\ B = B\,(\dot{u}^{\circ}) = \left\{\mathcal{M}\left[\chi\,(\dot{u}^{\circ})\right] + E^{\circ}_{A}\,(\dot{u}^{\circ}) - \frac{1}{8}\mathcal{N}\left[\lambda\,(\dot{u}^{\circ})\right]\right\} + \gamma\left\{2\mathcal{N}\left[\varepsilon_L\,(\tilde{u}), \varphi\,(\dot{u}^{\circ})\right]\right. \\ \left. - \frac{1}{2}\mathcal{N}\left[\lambda\,(\dot{u}^{\circ})\ ,\ \varphi\,(\tilde{u}^{\circ}, \dot{u}^{\circ})\right]\right\} + \gamma^2\ 2\mathcal{N}\left[\varphi\,(\tilde{u}^{\circ})\ ,\ \varphi\,(\dot{u}^{\circ})\right] \end{array}\right.$$

D'où l'on déduit, puisque A est positif : $B\,(\dot{u}^{\circ}) \leqslant 0$

Or, $B\,(\dot{u}^{\circ})$ est une forme quadratique en $\dot{u}^{\circ}$.

Il suffit pour établir le point 2 de montrer que cette forme quadratique est définie positive sous les hypothèses indiquées : on en déduira en effet que $\dot{u}^\circ$ est nul, puis en repportant dans (4.22) que $\mathcal{M}[\sigma(\dot{u}_0)] + E_{A_0}(\dot{u}_0)$ est nul, donc que $\dot{u}_0 = 0$. On aura alors $\dot{u} = 0$, et démontré l'unicité de la solution $u(\gamma) = \gamma\tilde{u}$.

Puisque $\tilde{u}$ est borné lorsque γ tend vers zéro, on a :

$$B(\dot{u}^\circ) \geq \mathcal{M}\left[\chi(\dot{u}^\circ)\right] + E^\circ_A(\dot{u}^\circ) - \frac{1}{8}\mathcal{M}\left[\lambda(\dot{u}^\circ)\right] - \varepsilon(\gamma)\,\|\dot{u}^\circ\|^2_{H^2(\Omega)}$$

avec $\varepsilon(\gamma) \longrightarrow 0$ lorsque $\gamma \longrightarrow 0$.

Par ailleurs, $\mathcal{M}\left[\chi(\dot{u}^\circ) + E^\circ_A(\dot{u}^\circ)\right. \geq \alpha\,\|\dot{u}^\circ\|_{H^2(\Omega)}$ avec $\alpha > 0$

et $\mathcal{M}\left[\lambda(\dot{u}^\circ)\right] = \frac{1}{2}\mu^2\int_\Omega B^{\alpha\beta\lambda\mu}\, b_{\alpha\beta}\, b_{\lambda\mu}\, \dot{u}^{\circ 2}\sqrt{a}\,dx \leq K\mu^2\,\|u^\circ\|^2_{H^2(\Omega)}$

Il vient donc finalement :

$$B(\dot{u}^\circ) \geq (\alpha - K\mu^2 + \varepsilon(\gamma))\,\|\dot{u}^\circ\|^2_{H^2(\Omega)}$$

Si $\alpha - K\mu^2$ est positif, B sera défini positif pour γ suffisamment petit.

Or, la condition $\alpha - K\mu^2 > 0$ est réalisée : soit, pour une surface moyenne donnée, si μ n'est pas trop grand, c'est à dire si la coque est suffisamment épaisse, soit si K est petit. Cette dernière condition est réalisée si le torseur de courbure $b_{\alpha\beta}$ n'est pas trop grand en module, c'est à dire si la courbure est faible. En particulier, dans le cas d'une plaque, λ est nul, et par conséquent B est toujours définie positive.

<u>Remarque</u> - Nous n'avons pas tenté de préciser pour quelles valeurs de γ les résultats précédents sont acquis. Nous le ferons dans un cas particulier.

Beaucoup de ces résultats ont été établis en remarquant que des quantités de la forme $\gamma^p f(\bar{u}, u)$, ou $\gamma^p g(\tilde{u}, u)$, où les fonctions f et g sont bornées, tendent vers zéro avec γ. Les résultats seront donc obtenus pour des valeurs de γ d'autant plus grandes que les bornes des fonctions f et g sont plus petites.

Or, nombre de ces fonctions ne dépendent de $\bar{u}$ que par l'intermédiaire de $\varphi(\bar{u})$, donc ne dépendent que de $\bar{u}^\circ_{|\alpha}$ (C.F. par exemple dans 4-18) Elles seront donc petites ou nulles avec $\bar{u}^\circ_{|\alpha}$. Nous étudierons par la suite ce cas particulier où la solution linéaire $\bar{u}$ vérifie $\bar{u}^\circ_{|\alpha} = 0$, c'est à dire $\bar{u}^\circ = \text{cste}$. Il correspond en particulier au cas où l'état de contraintes pour la solution linéaire est un état de contraintes de membrane. On peut également remarquer que le coefficient de ρ^2 dans 4.18 sera de la forme

$$a(u, u) + 2\gamma \mathcal{N}\left[\varepsilon(\bar{u}), \varphi(u)\right]$$

Le terme $2\mathcal{N}[\varepsilon(\bar{u}), \varphi(u)] = \int_\Omega N^{\alpha\beta}[\varepsilon(\bar{u})] \frac{\mu}{2} u^\circ_{|\alpha} u^\circ_{|\beta} \sqrt{a}dx$ jouera donc un rôle important. Cette remarque justifie le paragraphe ci-dessous.

2.- Un lemme

Soit $P \in \Sigma$ un point image de $x \in \Omega$. On désigne par $T(x)$ l'ensemble des vecteurs unités $\vec{t}$ tangents en P à Σ : $\vec{t} = t_\alpha \vec{a}^\alpha$, $a^{\alpha\beta} t_\alpha t_\beta = 1$

Soit $f(x)$ une fonction scalaire définie sur Σ, suffisamment régulière : on désigne par $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ le gradient de f dans Σ : $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = f_{|\alpha} \vec{a}^\alpha$

Soit $\bar{\bar{N}}(x)$ un champ de tenseur d'ordre deux symétrique sur Σ, de composantes contravariantes $N^{\alpha\beta}(x)$. On désigne par $N^-(x)$ et $N^+(x)$ ses valeurs principales en x, c'est à dire les quantités

$$N^-(x) = \inf_{\vec{t} \in T(x)} N^{\alpha\beta}(x)\, t_\alpha t_\beta \quad ; \quad N^+(x) = \sup_{\vec{t} \in T(x)} N^{\alpha\beta}(x)\, t_\alpha t_\beta$$

Lemme 4.4 :

Soit $\overline{\overline{N}}(x)$ un champ de tenseur d'ordre 2 symétrique sur Σ, de composantes dans $L^2(\Omega)$. Les propriétés (a) et (b) ci-dessous sont équivalentes :

(a) $\displaystyle\int_\Omega N^{\alpha\beta}(x)\, u^\circ_{|\alpha}\, u^\circ_{|\beta} \sqrt{a}\, dx \geq K_1 \int_\Omega [\overrightarrow{\text{grad}}\, u^\circ]^2 \sqrt{a}\, dx \quad \forall u \in W$

(resp^t: $\displaystyle\leq K_2 \int_\Omega [\overrightarrow{\text{grad}}\, u^\circ]^2 \sqrt{a}\, dx \quad \forall u \in W$)

(b) $N^-(x) \geq K_1$ p.p. sur Ω (resp^t: $N^+(x) \leq K_2$ p.p. sur Ω)

Démonstration :

Point 1 : (b) entraîne (a). Posant $\overrightarrow{\text{grad}}\, u^\circ = |\overrightarrow{\text{grad}}\, u^\circ|\, \vec{t}$ avec $\vec{t} \in T(x)$, donc $u^\circ_{|\alpha} = |\overrightarrow{\text{grad}}\, u^\circ|\, t_\alpha$, il vient :

$$\int_\Omega N^-(x)\, [\overrightarrow{\text{grad}}\, u^\circ]^2 \sqrt{a}\, dx \leq \int_\Omega N^{\alpha\beta}(x)\, u^\circ_{|\alpha}\, u^\circ_{|\beta} \sqrt{a}\, dx \leq$$

$$\leq \int_\Omega N^+(x)\, [\overrightarrow{\text{grad}}\, u^\circ]^2 \sqrt{a}\, dx$$

Il est donc évident que (b) entraîne (a).

Point 2 : Pour démontrer que (a) entraîne (b), il suffit de démontrer que (a)' entraîne (b)' :

(a)' $\displaystyle\int_\Omega N^{\alpha\beta}(x)\, u^\circ_{|\alpha}\, u^\circ_{|\beta} \sqrt{a}\, dx \geq 0 \quad \forall u \in W$

(b)' $N^-(x) \geq 0$ p.p. sur Ω.

On peut en effet remarquer que la propriété relative à K_2 et $N^+(x)$ se

déduit de celle relative à K_1 et $N^-(x)$ en changeant $\bar{\bar{N}}$ en $-\bar{\bar{N}}$, puis, que le cas $K_1 \neq 0$ se ramène au cas $K_1 = 0$ en remplaçant $\bar{\bar{N}}$ par $\bar{\bar{N}} - K_1 \bar{\bar{a}}$, où $\bar{\bar{a}}$ est le tenseur métrique de Σ. On a en effet :

$$K_1 \int_\Omega (\overrightarrow{\text{grad}}\, u^\circ)^2 \sqrt{a}\, d\,x = \int_\Omega K_1\, a^{\alpha\beta}\, t_\alpha\, t_\beta\, (\overrightarrow{\text{grad}}\, u^\circ)^2 \sqrt{a}\, d\,x = \int_\Omega K_1\, a^{\alpha\beta}\, u^\circ_{|\alpha}\, u^\circ_{|\beta} \sqrt{a}\, d\,x$$

et $$N^-(x) - K_1 = \inf_{\vec{t} \in T(x)} (N^{\alpha\beta}(x) - K_1\, a^{\alpha\beta})\, t_\alpha\, t_\beta = (\bar{\bar{N}} - K_1 \bar{\bar{a}})^-(x)$$

<u>Point 3</u> : La condition (b)' est encore équivalente à successivement :

- $N^{\alpha\beta}(x)\, t_\alpha\, t_\beta \geq 0 \quad \forall \vec{t} \in T(x)$, p.p. sur Ω
- $f(x, \alpha) \equiv N^{11}(x) \cos^2\alpha + 2\, N^{12}(x) \cos\alpha \sin\alpha + N^{22}(x) \sin^2\alpha \geq 0$

  $\forall \alpha \in \left]-\pi, +\pi\right]$, p.p. sur Ω
- (b)" : l'ensemble $\Omega -$ des $x \in \Omega$ tels qu'il existe $\alpha \in \left]-\pi, +\pi\right]$ (α dépendant éventuellement de x) pour lequel $f(x, \alpha)$ est négatif, est de mesure nulle.

Nous allons procéder par l'absurde, c'est à dire montrer que si (b)" n'est pas vérifiée, alors il existe $u \in W$ telle que $\int_\Omega N^{\alpha\beta}(x)\, u^\circ_{|\alpha}\, u^\circ_{|\beta} \sqrt{a}\, d\,x$ soit strictement négatif.

<u>Point 4</u> : Soient $\alpha_{np} = p\,\frac{\pi}{n}$ (n entier > 0, p entier, $-n < p \leq n$). Pour n fixé, les $2n$ points α_{np} partagent le segment $\left]-\pi, +\pi\right]$ en parties égales.

Soit $\mathcal{V}_{n,p} = \left\{ \alpha \mid \alpha \in \left]-\pi, +\pi\right],\ |\alpha_{np} - \alpha| < \frac{\pi}{n} \text{ (mod. } 2\pi) \right\}$.

Les $\mathcal{V}_{n,p}$ recouvrent le segment $\left]-\pi, +\pi\right]$

Soit $\Omega^-_{np} = \left\{ x \mid x \in \Omega \ , \ f(x, \alpha) < 0 \ \ \forall \alpha \in \mathcal{V}_{np} \right\}$. On a :

$$\Omega^- = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\bigcup_{-n<p\leq n} \Omega^-_{np} \right]$$

En effet, tout x appartenant à un des Ω^-_{np} est évidemment dans Ω^-, et inversement, si $x \in \Omega^-$, il existe α_0 tel que $f(x, \alpha_0) < 0$, et f étant continue en α, il existe un voisinage $\mathcal{V}(\alpha_0)$ que l'on peut toujours supposer appartenir à la famille des $\mathcal{V}_{np}$, tel que $f(x, \alpha)$ soit strictement négatif pour tout $\alpha \in \mathcal{V}(\alpha_0)$

<u>Point 5</u> : Si Ω^- n'est pas de mesure nulle, un au moins des Ω^-_{np} n'est pas de mesure nulle. En effet, la famille des Ω^-_{np} est dénombrable, et si tous étaient de mesure nulle, leur réunion serait de mesure nulle.

Il existe donc $\alpha_0 \in]-\pi, +\pi]$ tel que l'ensemble Ω^-_0 des $x \in \Omega$ pour lesquels $f(x, \alpha_0)$ est strictement négatif est de mesure non nulle.

<u>Point 6</u> : Soit $\Omega^-_k = \left\{ x \mid x \in \Omega, f(x, \alpha_0) < -\frac{1}{k} \right\}$ (k entier > 0)

On a : $\Omega^-_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega^-_k$ - En effet : $\Omega^-_k \subset \Omega^-_0 \ \ \forall k$, et si $x_1 \in \Omega^-_0$, alors $x_1 \in \Omega^-_k$ pour tout $k > \frac{1}{f(x_1, \alpha_0)}$

Les Ω^-_k étant dénombrables, un au moins est de mesure non nulle. Par ailleurs, les $N^{\alpha\beta}(x)$ étant dans $L^2(\Omega)$, chacun des Ω^-_k est mesurable. On a donc établi que si Ω^- est de mesure non nulle, il existe $\tilde{\Omega} \subset \Omega^-_{k_0} \subset \Omega$ de mesure non nulle, un $\alpha_0 \in]-\pi, +\pi]$ et un scalaire $\rho = \frac{1}{k_0} > 0$ tels que

$$f(x, \alpha_0) < -\rho \quad \forall x \in \tilde{\Omega}.$$

Nous pouvons toujours supposer que $\tilde{\Omega}$ n'est pas de type manchon, et par rotation des axes sur $\tilde{\Omega}$, nous ramener au cas $\alpha_0 = 0$ (la fonction à

intéger dans (a)' est en effet indépendante du choix des cartes locales sur Ω).

Finalement : si Ω^- n'est pas de mesure nulle, il existe $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, $\rho > 0$, tels que :

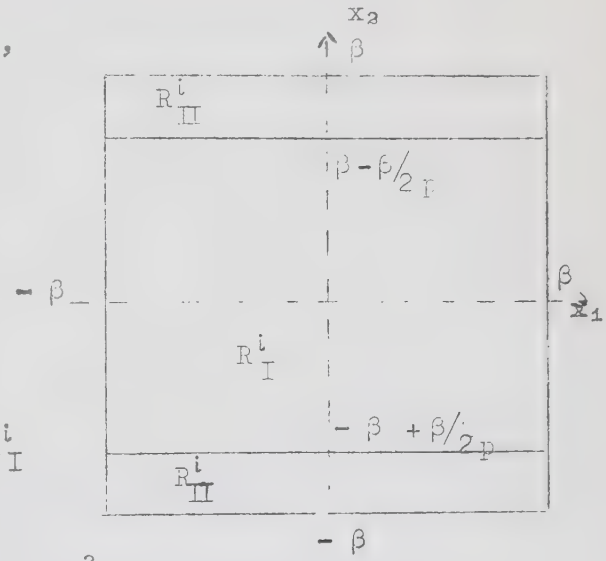
$$f(x, 0) \equiv N^{11}(x) < -\rho \quad \forall x \in \tilde{\Omega}, \quad \text{avec mes } (\tilde{\Omega}) \neq 0$$

<u>Point 7</u> : $\tilde{\Omega}$ étant mesurable, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une figure élémentaire R constituée de carrés R^i, $i = 1 \ldots N$, semi ouverts, égaux, de côtés parallèles aux axes, et e_1 et e_2 mesurables contenus dans Ω, tels que :

$$\tilde{\Omega} + e_1 = R + e_2 \quad \text{et} \quad \text{mes } (e_i) < \varepsilon, \; i = 1, 2.$$

qui entraîne en particulier : $\text{mes } (R) \geq \text{mes } (\tilde{\Omega}) - 2\varepsilon$

Soit $u = (0, u^o)$, avec $u^o = 0$ à l'extérieur de R, et u^o défini de la façon suivante sur chaque R^i composant R : l'origine des axes étant choisie au centre du carré envisagé, on partage R^i en R^i_I et R^i_{II} comme indiqué sur la figure ci-contre (p est un entier > 1, 2β est la longueur des côtés de R_i, commune à tous les R_i) et on prend :



$$u^o = \frac{2\beta}{p^2}\left(1 - \cos 2p^2 \pi \frac{x^1}{\beta}\right) \quad \text{pour } x \in R^i_I$$

$$u^o = \frac{\beta}{p^2}\left(1 - \cos 2p^2 \pi \frac{x^1}{\beta}\right)\left(1 - \cos 2p\pi \frac{x^2}{\beta}\right) \quad \text{pour } x \in R^i_{II}$$

On vérifie que u^o ainsi choisi est continue et à dérivées pre-

mières continues sur Ω. Quand aux dérivées secondes, elles existent et sont continues partout, sauf aux frontières des différentes régions. Par ailleurs, u^o et ses dérivées premières sont nulles au bord de Ω, donc $u^o \in H^2_o(\Omega)$. Par conséquent, $u \in W$.

Point 8 :

Soit $\bar{N}^{11}(x)$ la fonction égale à $N^{11}(x)$ pour $x \in \tilde{\Omega}$, et égale à $-\rho$ pour $x \in e_1$. On a $\bar{N}^{11}(x) < -\rho \quad \forall\ x \in R$. Par ailleurs :

$$\int_\Omega N^{\alpha\beta}(x)\, u^o_{|\alpha}\, u^o_{|\beta} \sqrt{a}\, dx = \int_R .. = \int_R \bar{N}^{11}(x)\, u^{o\,2}_{|1} \sqrt{a}\, dx +$$

$$\int_{R \cap e_1} \left(N^{11}(x) - \bar{N}^{11}(x)\right) u^{o\,2}_{|1} \sqrt{a}\, dx + \int_R (2\, N^{12}\, u^o_{|1}\, u^o_{|2} + N^{22}\, u^{o\,2}_{|2}) \sqrt{a}\, dx$$

La fin de la démonstration consiste à montrer que la première des intégrales du second membre est bornée supérieurement par une quantité strictement négative (point 9), et que l'on peut choisir ε et p de façon à rendre chacune des deux autres intégrales aussi petites que l'on veut. On en déduira alors que le membre de gauche est négatif, donc que (a)' n'est pas vérifiée pour la fonction u choisie. Le lemme sera établi.

Point 9 : Soit $\bar{a}$ la borne inférieure de a sur $\bar{\Omega}$ ($\bar{a} > 0$, CH II parag. 1)

On a : $$\int_R \bar{N}^{11}\, u^{o\,2}_{|1} \sqrt{a}\, dx \leq -\rho\sqrt{\bar{a}} \sum_{i=1}^{N} \int_{R^i_I} u^{o\,2}_{|1}\, dx = -\rho\sqrt{\bar{a}}\, N\, 16\, \pi^2 \beta \left(2\beta - \frac{\beta}{p}\right) \leq$$

$$-4\pi^2 \rho\sqrt{\bar{a}}\, N\, 4p^2 = -4\pi^2 \rho\sqrt{\bar{a}}\ \text{mes}\,(R) \leq -2\pi^2 \rho\sqrt{\bar{a}}\ \text{mes}\,(\tilde{\Omega})$$

pour $\varepsilon < \frac{1}{4}$ mes $(\tilde{\Omega})$.

Point 10 : Remarquant que $u^{o}_{|1}{}^{2}$ est borné supérieurement par $16\,\pi^2$, on a :

$$\left| \int_{R \cap e_1} \left(N^{11}(x) - \bar{N}^{11}(x)\right) u^{o}_{|1}{}^{2} \sqrt{a}\, d\,x \right| \leqslant 16\,\pi^2 \left[\int_{e_1} \left| N^{11}(x) - \bar{N}^{11}(x) \right| \sqrt{a}\, d\,x \right]$$

En vertu de la continuité absolue de l'intégration, le dernier crochet tend vers zéro avec mes (e_1) , donc avec ε .

Remarquant que $u^{o}_{|2}$ est nul sur R^{i}_{I} , et que $u^{o}_{|1}$ et $u^{o}_{|2}$ sont bornés en module par $4\,\pi$ et $\frac{4\,\pi}{p}$ respectivement, il vient :

$$\left| \int_{R} \left(2\, N^{12}\, u^{o}_{|1}\, u^{o}_{|2} + N^{22}\, u^{o}_{|2}\right) \sqrt{a}\, d\,x \right| \leqslant \frac{16\,\pi^2}{p} \int_{\cup R^{i}_{II}} \left[2\, \left| N^{12}(x) \right| + \left| N^{22}(x) \right| \right] \sqrt{a}\, d\,x$$

Le dernier terme tend vers zéro lorsque p tend vers l'infini.

3.- Un résultat sur les solutions de type "non métallique"

Une solution $\tilde{u}$ du P.N.L. 1 est dite de type non métallique si l'état de contraintes résultantes qui lui correspond est en (presque) tout point de Σ un état de traction dans toutes les directions, c'est à dire si la contrainte principale $N^{-}\left(\varepsilon(\tilde{u})\right)$ est positive ou nulle p.p. D'après le lemme précédent, cette définition est équivalente à :

$$\mathcal{N}\left[\varepsilon\,(\tilde{u})\,,\ \varphi\,(u)\right] = \frac{\mu}{4} \int_{\Omega} N^{\alpha\beta}\left[\varepsilon\,(\tilde{u})\right] u^{o}_{|\alpha}\, u^{o}_{|\beta} \sqrt{a}\, d\,x \geqslant 0 \quad \forall\, u \in W\,.$$

Proposition 4.17

1) Il existe au plus une solution du P.N.L. 1 qui soit du type non métallique. Lorsqu'une solution de ce type existe, soit $\tilde{u}$, on a :

2) La fonctionnelle de l'énergie $E\,(u)$ atteint son minimum absolu sur W en $\tilde{u}$, et en $\tilde{u}$ seulement. $\tilde{u}$ est donc solution du P.N.L. 3.

3) La charge tangente g_o vérifie les conditions de la remarque 4.2.

Démonstration

Points 1 et 2 : Le point 1 est conséquence immédiate du point 2.

Formons la différence $G(u) = E(\tilde{u} + u) - E(\tilde{u})$. Puisque $\tilde{u}$ est solution du P.N.L. 1 par hypothèse, les termes de degré 0 et 1 dans $G(u)$ sont nuls:

$$G(u) = \mathcal{N}\left[\varepsilon_L(u) + 2\,\varphi(\tilde{u}, u) + \varphi(u)\right] +$$

$$+ 2\,\mathcal{N}\left[\varepsilon(\tilde{u}), \varphi(u)\right] + \mathcal{M}\left[\chi(u)\right] + E_A(u)$$

Et puisque $\tilde{u}$ est de type non métallique par hypothèse :

$$G(u) \geqslant \mathcal{N}\left[\varepsilon_L(u) + 2\,\varphi(\tilde{u}, u) + \varphi(u)\right] + \mathcal{M}\left[\chi(u)\right] + E_A(u)$$

Pour tout $u \neq 0$, on a :

$$G(u) \geqslant \mathcal{M}\left[\chi(u^o)\right] + E^o_A(u^o) > 0 \qquad \text{si } u^o \neq 0$$

$$G(u) = \mathcal{N}\left[\sigma(u_o)\right] + E_{A_o}(u_o) > 0 \qquad \text{si } u^o = 0$$

ce qui établit les points 1 et 2.

Point 3 : Il s'agit de montrer que l'on a (notations de IV-A.2) :

$$\langle g_o, v_o \rangle \geqslant 0 \quad \forall v \in \Phi^* \iff v \in W,\ E_{A_o}(v_o) = 0,\ \sigma(v_o) + \varphi(v^o) = 0$$

Puisque $\tilde{u}$ est solution du P.N.L. 1, on a : $d^1 E(\tilde{u}; u) = 0 \quad \forall u \in W$, soit :

$$2\,\mathcal{N}\left[\varepsilon(\tilde{u}), \varepsilon_L(u) + 2\,\varphi(\tilde{u}, u)\right] + 2\,\mathcal{M}\left[\chi(\tilde{u}), \chi(u)\right] + 2\,E_A(\tilde{u}, u) + \langle g, u \rangle = 0$$

$$\forall u \in W.$$

Ayant choisi v quelconque dans Φ^*, écrivons la relation précédente pour $u = (v_o, 0)$. Il vient, puisque $E_{A_o}(v_o, v_o) = 0 \quad \forall u_o$:

$$2\,\mathcal{N}\left[\varepsilon(\tilde{u}), \sigma(v_o)\right] + \langle g_o, v_o \rangle = 0 \quad , \text{ et par conséquent :}$$

$$\langle g_o, v_o \rangle = 2\,\mathcal{N}\left[\varepsilon(\tilde{u}), \varphi(v^o)\right] \geqslant 0$$

Remarquons que l'avant dernière relation est vérifiée pour toute solution $\tilde{u}$ du P.N.L. 1.

nous avons montré que si $\gamma\tilde{u}$ (ici : $\gamma\bar{u}$) et $\gamma\bar{u}+\dot{u}$ sont deux solutions distinctes du P. N. L. 1 , alors $\dot{u}^\circ \neq 0$ et (CF (4.22) avec $\tilde{u} = \bar{u}$ et $\bar{u}^\circ =$ cste) :

$$B(\dot{u}^\circ) \equiv \mathcal{M}\left[\chi(\dot{u}^\circ)\right] + E^\circ_A(\dot{u}^\circ) - \frac{1}{8}\mathcal{N}\left[\lambda(\dot{u}^\circ)\right] + 2\gamma\mathcal{N}\left[\varepsilon(\bar{u}), \varphi(\dot{u}^\circ)\right] \leq 0$$

Or, sous les hypothèses du point 3 , on a :

$$0 \geq B(\dot{u}^\circ) \geq \left(1 - \frac{k}{8}\right)\left[\mathcal{M}\left[\chi(\dot{u}^\circ)\right] + E^\circ_A(\dot{u}^\circ)\right] \quad \text{avec} \quad 1 - \frac{k}{8} > 0$$

ce qui est impossible.

<u>Point 3</u> : Si, pour la valeur γ du paramètre de charge, il existe une seconde solution $\gamma\bar{u} + \dot{u}$, avec $\dot{u} \neq 0$ donc $\dot{u}^\circ \neq 0$, on a comme précédemment :

$B(\dot{u}^\circ) \leq 0$, ce qui entraîne en posant $a^\circ(u^\circ, u^\circ) = \mathcal{M}\left[\chi(u^\circ)\right] + E^\circ_A(u^\circ)$:

$$(4\text{-}24) \quad 2\gamma\frac{\mu}{4}K_1\int_\Omega \left[\overrightarrow{\text{grad}}\,\dot{u}^\circ\right]^2\sqrt{a}\,dx \leq 2\gamma\mathcal{N}\left[\varepsilon(\bar{u}), \varphi(\dot{u})\right] \leq \left(\frac{k}{8} - 1\right)a^\circ(\dot{u}^\circ, \dot{u}^\circ)$$

avec $\left(\frac{k}{8} - 1\right) \geq 0$

Par ailleurs, $E(u)$ est stationnaire en $\gamma\bar{u} + \dot{u}$, ce qui entraîne :

$\frac{d}{d\rho}E(\gamma\bar{u} + \rho u) = 0$ pour $u = \dot{u}$ et $\rho = 1$, ce qui s'écrit :

$$a(\dot{u}, \dot{u}) + 2\gamma\mathcal{N}\left[\varepsilon(\bar{u}), \varphi(\dot{u})\right] + 3\mathcal{N}\left[\varepsilon_L(\dot{u}), \varphi(\dot{u})\right] + 2\mathcal{N}\left[\varphi(\dot{u})\right] = 0$$

d'où on déduit successivement, puisque $\mathcal{N}\left[\varepsilon_L(\dot{u})\right]$ et $a^\circ(\dot{u}^\circ, \dot{u}^\circ)$ sont tous deux inférieurs à $a(\dot{u}, \dot{u})$:

$$a(\dot{u}, \dot{u}) - 3\,a^{1/2}(\dot{u}, \dot{u})\,\mathcal{N}^{1/2}\left[\varphi(\dot{u})\right] + 2\mathcal{N}\left[\varphi(\dot{u})\right] \leq 0$$

$$a^\circ(\dot{u}^\circ, \dot{u}^\circ) \leq a(\dot{u}, \dot{u}) \leq 2\mathcal{N}^{1/2}\left[\varphi(\dot{u})\right] \quad \left(\leq 2\,a(\dot{u}, \dot{u})\right)$$

Or, $\mathcal{N}\left[\varphi(\dot{u})\right] = \frac{\mu^2}{8}\int_\Omega \frac{hE}{1+\nu}\left(a^{\alpha\lambda}a^{\beta\mu} + \frac{\nu}{1-\nu}a^{\alpha\beta}a^{\lambda\mu}\right)\dot{u}^\circ_{|\alpha}\,\dot{u}^\circ_{|\beta}\,\dot{u}^\circ_{|\lambda}\,\dot{u}^\circ_{|\mu}$

$$= \frac{\mu^2}{8}\int_\Omega \frac{hE}{1-\nu^2}\left[\overrightarrow{\text{grad}}\,\dot{u}^\circ\right]^4\sqrt{a}\,dx \leqslant K\int_\Omega\left[\overrightarrow{\text{grad}}\,\dot{u}^\circ\right]^4\sqrt{a}\,dx$$

On a donc finalement :

$$(4\text{-}25)\qquad a^\circ(\dot{u}^\circ, \dot{u}^\circ) \leqslant K'\left[\int_\Omega\left[\overrightarrow{\text{grad}}\,\dot{u}^\circ\right]^4\sqrt{a}\,dx\right]^{1/2}$$

Supposons que le point 3 ne soit pas vérifié. Il existe alors une suite γ_n tendant vers l'infini et une suite $\dot{u}^\circ_n$, avec $\dot{u}^\circ_n \neq 0$, vérifiant (4-24) et (4-25) pour tout n. Considérons la suite

$v^\circ_n = \dfrac{\dot{u}^\circ_n}{\left[a^\circ(\dot{u}^\circ_n, \dot{u}^\circ_n)\right]^{1/2}}$. Elle vérifie les relations ci-dessous déduites de (4-24) et (4-25) :

$$(4\text{-}24)'\qquad 2\,\gamma_n\frac{\mu}{4}K_1\int_\Omega\left[\overrightarrow{\text{grad}}\,v^\circ_n\right]^2\sqrt{a}\,dx \leqslant \frac{k}{8} - 1$$

$$(4\text{-}25)'\qquad 1 \leqslant K'\left[\int_\Omega\left[\overrightarrow{\text{grad}}\,v^\circ_n\right]^4\sqrt{a}\,dx\right]^{1/2}$$

La suite v°_n est bornée dans $H^2(\Omega)$. Il existe donc une sous-suite qui vonverge vers un élément v° dans $H^2(\Omega)$ faible, donc dans $H^1(\Omega)$ et $W_1^4(\Omega)$. Par conséquent, la suite $|\overrightarrow{\text{grad}}\,v^\circ_n|$ converge vers $|\overrightarrow{\text{grad}}\,v^\circ|$ dans $L^2(\Omega)$ et $L^4(\Omega)$. Or, en passant à la limite dans (4-24)' et (4-25)' on trouve successivement : $|\overrightarrow{\text{grad}}\,v^\circ| = 0$ dans $L^2(\Omega)$, et $|\overrightarrow{\text{grad}}\,v^\circ| \neq 0$ dans $L^4(\Omega)$, ce qui est contradictoire.

b) - Cas où l'état de contraintes $\mathcal{M}[\varepsilon_L(\bar{u})]$ n'est pas non métallique

Nous supposons ici qu'il existe $u \in W$ tel que $\mathcal{M}[\varepsilon_{\mathbb{L}}(\bar{u}), \varphi(u)] < 0$, ou encore que les contraintes principales de la solution linéaire ne sont pas p.p. positives ou nulles.

Proposition 4.19

Il existe γ_1, avec $0 < \gamma_1 < \infty$, tel que $\gamma\bar{u}$ soit solution du P.N.L. 3 pour $\gamma \in [0, \gamma_1[$, et ne soit pas solution du P.N.L. 3 pour $\gamma > \gamma_1$.

Démonstration

Le coefficient de ρ^2 dans (4.18) est

$$\Phi(u) \equiv a(u, u) + 2\gamma\mathcal{M}[\varepsilon_L(\bar{u}), \varphi(u)].$$

Posons $2\mathcal{M}[\varepsilon_L(\bar{u}), \varphi(u, v)] = b(u, v)$. La fonctionnelle $b(u, v)$ est bilinéaire continue symétrique sur $[L^2(\Omega)]^2 \times W_4^1(\Omega)$. Par ailleurs, $b(u, u)$ prend des valeurs négatives et est bornée inférieurement sur $S = \{u \mid u \in W, a(u, u) = 1\}$.

Elle possède donc sur S une plus grande borne inférieure, négative : $-\lambda_1$. On a donc : $b(u, u) \geq -\lambda_1 a(u, u) \quad \forall u \in W$, soit :

$$\Phi(u) \geq a(u, u)(1 - \gamma\lambda_1) \quad \forall u \in W.$$

Le coefficient de ρ^2 est défini positif pour $\gamma < \gamma_1 = \frac{1}{\lambda_1}$, et par conséquent $\gamma\bar{u}$ est solution du P.N.L. 3.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $u \in W$, tel que : $b(u, u) < -\lambda_1 + \varepsilon$ donc tel que : $\Phi(u) < a(u, u)[1 - \gamma\lambda_1 + \gamma\varepsilon]$. Quel que soit $\gamma > \gamma_1$, le terme $1 - \gamma\lambda_1$ est négatif, et par conséquent le crochet est négatif

pour ε suffisamment petit : $\gamma \bar{u}$ n'est pas solution du P.N.L. 3 pour $\gamma > \gamma_1$

Remarque 1 : Le minimum $-\lambda_1$ est atteint en un point de S.

Soit en effet une suite minimisante de $b(u, u)$ sur S. Elle est bornée dans W. Il existe donc une sous suite qui converge vers un élément u_1 dans W faible et dans $L^2(\Omega) \times W_4^{\frac{1}{4}}(\Omega)$ fort. De ces convergences et de la continuité de b et de la semi continuité inférieure faible de $a(u, u)$ on déduit :

$$a(u_1, u_1) \leq 1 \quad , \quad b(u_1, u_1) = -\lambda_1$$

Montrons que $u_1 \in S$, c'est à dire que $a(u_1, u_1) = 1$. Si en effet on avait $a(u_1, u_1) < 1$, on aurait pour $v_1 = \dfrac{u_1}{[a(u_1, u_1)]^{1/2}} \in S$

$$-\lambda_1 \leq b(v_1, v_1) = \frac{b(u_1, u_1)}{a(u_1, u_1)} = \frac{-\lambda_1}{a(u_1, u_1)} < -\lambda_1$$

Le minimum $-\lambda_1$ est donc atteint en $u_1 \in S$

Remarque 2 : L'ensemble (λ_1, u_1) est solution du problème aux valeurs propres : $b(u, v) + \lambda a(u, v) = 0 \quad \forall v \in W$

En effet, pour tout $u \in W$ on a : $b(u, u) + \lambda_1 a(u, u) \geq 0$

Posant : $u = u_1 + \rho v$, avec $\rho \in R^+$ et $v \in W$, il vient :

$$2\rho\left[b(u_1, v) + \lambda_1 a(u_1, v)\right] + \rho^2\left[b(v, v) + \lambda_1 a(v, v)\right] \geq 0$$

Divisant par $\rho > 0$, puis faisant tendre ρ vers zéro, il vient :

$$b(u_1, v) + \lambda_1 a(u_1, v) = 0$$

De plus, λ_1 est la plus grande valeur propre de ce problème. Si en effet il existait une solution (λ_2, u_2) avec $\lambda_2 > \lambda_1$, on aurait :

$$b\,(u_2\,,\,u_2) + \lambda_2\, a\,(u_2\,,\,u_2) = 0 \quad , \quad \text{soit}$$

$$\frac{b\,(u_2\,,\,u_2)}{a\,(u_2\,,\,u_2)} = -\,\lambda_2 < -\,\lambda_1 \quad , \quad \text{ce qui est impossible.}$$

On reconnait dans ce problème aux valeurs propres le problème des points de bifurcation de la solution linéaire. Il en résulte que γ_1 n'est autre que la charge critique d'Euler classique.

Nous n'étudions pas ici le problème des points de bifurcation. Disons simplement que la théorie de Riez permet de montrer que l'ensemble des valeurs propres positives λ_i (resp^t : négatives $-\,\mu_i$) , répétées autant de fois que l'indique leur multiplicité, forme une suite qui est soit finie, soit infinie et tendant vers zéro, et qu'il existe une suite u_i (respec^t : v_i) de vecteurs propres associés, l'ensemble des u_i et des v_i étant orthonormé dans W pour le produit scalaire $a\,(u\,,\,v)$ et pseudo orthogonal pour $b\,(u\,,\,v)$, telles que en particulier :

$$b\,(u\,,\,u) = -\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \left[a\,(u_i\,,\,u)\right]^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \left[a\,(v_j\,,\,u)\right]^2$$

Proposition 4.20

Il existe γ_2 $(0 < \gamma_2 \leqslant \gamma_1)$, tel que la solution $\gamma\bar{u}$ du P.N.L. réalise le minimum absolu de $E\,(u)$ sur W pour $\gamma \in [\,0\,,\,\gamma_2\,[$, et ne le réalise pas pour $\gamma > \gamma_2$

<u>Démonstration</u> : Soient G_1 (resp^t : G_2) l'ensemble des $\gamma \geqslant 0$ tels que $E\,(u)$ soit (resp^t : ne soit pas) minimum en $\gamma\bar{u}$, c'est à dire tels que : $G\,(u\,,\,\gamma) = E\,(\gamma\bar{u} + u) - E\,(\gamma\bar{u}) \geqslant 0 \;\; \forall\, u \in W$ $\big($resp^t $\exists\, u$ tel que $G\,(u\,,\,\gamma) < 0\big)$.

On a $G_1 \cup G_2 = R^+$. $G(u, \gamma)$ se met sous la forme :

$$G(u, \gamma) = \eta\left[\varepsilon_L(u), \varphi(u)\right] + E_{A_0}(u_0) + a^\circ(u^\circ, u^\circ) + \gamma\, b(u, u)$$

$$\geq \gamma\, b(u, u)$$

$$G(u, \gamma') = G(u, \gamma) + (\gamma' - \gamma)\, b(u, u)$$

Soit $\gamma \in G_1$: tout $\gamma' \in [0, \gamma]$ est dans G_1. En effet : $G(u, \gamma')$ est positif pour tout u tel que $b(u, u) \geq 0$, et $G(u, \gamma') > G(u, \gamma) \geq 0$ pour tout u tel que $b(u, u) < 0$.

Soit $\gamma \in G_2$: tout $\gamma' \in [\gamma, +\infty[$ est dans G_2. En effet, il existe u tel que $G(u, \gamma) < 0$, donc tel que $b(u, u) < 0$, ce qui entraîne $G(u, \gamma') < G(u, \gamma) < 0$ pour tout $\gamma' > \gamma$.

G_2 contient les $\gamma > \gamma_1$: pour de tels γ, $\gamma\bar{u}$ n'étant pas un minimum local, ne peut être un minimum absolu.

G_1 contient $\gamma_3 > 0$ défini par :

$$-\frac{1}{\gamma_3} = \inf_{a^\circ(u^\circ, u^\circ) = 1} b(u^\circ, u^\circ)$$

En effet : $G(u, \gamma) \geq a^\circ(u^\circ, u^\circ) + \gamma\, b(u, u) \geq a^\circ(u^\circ, u^\circ)\left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_3}\right) =$

pour $\gamma = \gamma_3$

G_1 et G_2 forment une coupure définissant γ_2 cherché.

Remarquons que $\gamma_2 \in [\gamma_3, \gamma_1]$, et que $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_1$ dans le cas d'une plaque.

Proposition 4.21

Si $k = \sup\limits_{a^\circ(u^\circ,u^\circ)=1} \mathcal{N}\left[\lambda(u^\circ)\right] < 8$, il existe γ_4 , avec $0 < \gamma_4 < \gamma_3$, tel que le P.N.L. 1 ne possède que la solution $\gamma\bar{u}$ pour tout $\gamma \in \left[0 , \gamma_4\right[$.

Démonstration : On a vu (C.F. la démonstration du point 2 de la proposition 4.18) que la solution $\gamma\bar{u}$ est unique losque la forme quadratique

$$B(u^\circ) = a^\circ(u^\circ , u^\circ) - \frac{1}{8}\mathcal{N}\left[\lambda(u^\circ)\right] + \gamma\, b(u^\circ , u^\circ)$$

est définie positive.

Soit $\bar{B}(u^\circ) = a^\circ(u^\circ , u^\circ) - \frac{1}{8}\mathcal{N}\left[\lambda(u^\circ)\right]$.

On a : $\bar{B}(u^\circ) \geqslant a^\circ(u^\circ , u^\circ)\left(1 - \frac{k}{8}\right)$ avec $\left(1 - \frac{k}{8}\right) > 0$.

L'ensemble des u° tels que $\bar{B}(u^\circ) = 1$ est donc borné, et $b(u^\circ , u^\circ)$ est borné inférieurement sur cet ensemble. Soit $-\frac{1}{\gamma_4}$ sa plus grande borne inférieure. On a :

$$B(u^\circ) \geqslant \bar{B}(u^\circ)\left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_4}\right) \geqslant a^\circ(u^\circ , u^\circ)\left(1 - \frac{k}{8}\right)\left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_4}\right)$$

$B(u^\circ)$ est donc défini positif pour tout $\gamma \in \left[0 , \gamma_4\right[$

Par ailleurs, $\bar{B}(u^\circ) \leqslant a^\circ(u^\circ , u^\circ)$ entraîne $-\frac{1}{\gamma_4} \leqslant -\frac{1}{\gamma_3}$, donc $\gamma_4 \leqslant \gamma_3$.

Dans le cas d'une plaque, $\bar{B}(u^\circ) = a^\circ(u^\circ , u^\circ)$, donc

donc $\gamma_4 = \gamma_3 = \gamma_2 = \gamma_1$.

B I B L I O G R A P H I E

[1] DUNFORD N. et J.T. SCHWARTZ - Linear Operators - Part II - John Wiley et Sons - N.Y. 1963.

[2] L. SCHWARTZ - Théorie des distributions - Nouvelle édition - Hermann - PARIS 1966.

[3] G. de RHAM - Variétés différentiables - Act. Scient. et Indust. n°1222 Hermann - PARIS 1960.

[4] L. HORMANDER - Linear Partial Différential Operators - Springer-Verlag - BERLIN 1964.

[5] V. I. SMIRNOV - A course of Higher Mathematics - Vol. V - Pergamon - 1964.

[6] J. DENY et J.L. LIONS - Les espaces du type de Beppo Levi - Ann. Inst. Four. 5 pp (305/370) - 1955.

[7] CAMPANATO - Sui problemi al contorno per sistemi di equazioni différenziali lineari del tipo del elasticita (I) - An. Scuol. Norm. Sup. - PISA -13- pp (223/258) - 1959.

[8] K. O. FRIEDRICHS - On the boundary value problems of the theory of elasticity and Korns inequality - Ann. of Math 48 pp (441/471) - 1947.

[9] J. L. LIONS - Contribution à un problème de M. M Picone - Ann. di Mat. 41 pp (201/219) - 1955.

[10] J. L. LIONS - Problèmes aux limites en théorie des distributions - Acta Mathem. 94 pp (13/153) - 1955.

[11] L. H. DONNELL - A New Theory for the Buckling of Thin Cylinders under Axial Compression and Bending - A. S. M. E. Transactions Vol. 56 pp (795/806) - 1934.

[12] W. T. KOITER - La théorie générale des coques minces élastiques - Conférence devant la FACULTE DES SCIENCES de POITIERS-1961

[13] I. S. SOKOLNIKOV - Tensor analysis - Wiley N. Y. - 1951.

[14] A. E. GREEN et W. ZERNA - Theoretical elasticity - OXFORD Univ. Press. OXFORD - 1954.

[15] W. T. KOITER - A consistent first approximation in the general Theory of thin elastics sbells - Part 1 - Symposium I.U.T.A.M. Delft - 1959.

[16] J. L. LIONS - Methodes d'approximation numerique des problèmes aux limites de la Physique mathématique - Publication du C.N.R.S. N° F G/14-11-1/B I - 1963.

[17] J. L. LIONS - Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles - Université de MONTREAL - 1962.

[18] F. E. BROWDER - Variational methods for non linear elliptic eigenvalue problems - Bull. Amer. Math. Soc. 71 pp (176/183) - 1965.

D E U X I E M E T H E S E

Propositions données par la Faculté

Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations paraboliques : découplage et équation de Riccati.

VU et APPROUVE

Paris, le 29 mai 1969

Le Doyen de la Faculté des Sciences de Paris.

Marc ZAMANSKY

VU

et PERMIS D'IMPRIMER

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean ROCHE.